◉新・工科系の物理学◉
TKP-A8

量子光学と
量子情報科学

古澤　明

数理工学社

編者のことば

21 世紀に入っても，工学分野はますます高度に発達しつつある．今後も，工学に基づいた頭脳集約型産業がわが国を支える中心的な力であり続けるであろう．

工学とはいうまでもなく科学技術の成果と論理に基づいて人間社会に貢献する学問である．工学に共通した基盤の中心には数学と物理学がある．数学はいわば工学における言葉であり，物理学や化学は工学の基本的な道具である．一方で工学が急速に拡大するあまりに，工学の基礎に関する準備をなおざりにしたまま工学を学ぶことをよしとする考え方が広まっているようにも思う．しかし実際には，以前にもまして数学や基礎物理学が工学の中に深く浸透しており，物理学の知識や概念を欠いたまま工学を学ぶことはできなくなっている．例えば弾塑性論や破壊現象，流体現象，様々な電子デバイス，量子エレクトロニクスや量子情報工学の基礎としての量子力学あるいはシミュレーション技術など挙げればきりがない．新しい生命科学，生命工学，脳科学，医療に用いられる計測技術もすべて物理学の成果である．したがって工学の先端に深く関わりたいと願うならば，やはり基礎物理学を工学基礎として学ぶことが必要となる．

一方，最近の傾向として，高校の課程で物理学を学ばずに大学工学部に進学する学生が多くなっているようである．それを単純に悪いことだというのではなく，大学進学後にレベルを著しく落とすことなく大学の物理学に合流していくことができないだろうかと考えた．

以上のようないくつかの観点から全体を構成し，工学の諸分野で活躍しておられる方々に執筆をお願いしたのが本ライブラリ「新・工科系の物理学」である．

全体は 3 つのグループから構成されている．第 I 群は，工学部で学ぶための物理学の基礎を十分学んでこなかった学生のための物理学予備「第 0 巻 大学物理学への基礎」と全体を概観する「第 1 巻 物理学概論」である．第 II 群は，標準的な物理学各分野「力学」「電磁気学」「熱力学・統計力学」「量子力学」「物性物理学」を用意した．量子力学や物性物理学は，現在のところまだ限られた

学科でのみ講義が行われているが，しかし30年前と比べるとその広がりは著しい．これから20年後には，このような物理学を基礎とする工学分野はさらに拡大すると考え，これらも第II群に入れた．第III群には工学基礎となる物理学の各論的分野または物理学に基礎を置く工学諸分野を配した．いわば第II群が縦糸であり，第III群が横糸である．数年後にはもっと沢山のものを第III群に並べればよかったと思うことがあるかもしれないが，それはむしろ喜ばしいことと考える．また個々の書籍の選択には編者の個人的志向が大きく反映しているかもしれないが，この点については読者諸兄の批判に待ちたい．本ライブラリが，工学の基礎を学ぶ上で，あるいは工学を進める上でいささかでも役に立った，という評価を得られれば編者としてこれにすぐる喜びはない．

2005年1月

編者　藤原毅夫

「新・工科系の物理学」書目一覧

書目群 I	書目群 III
0　工科系 大学物理学への基礎	A–1　応用物理学
1　工科系 物理学概論	A–2　高分子物理学
書目群 II	A–3　バイオテクノロジーのための物理学
2　工学基礎 力学	A–4　シミュレーション
3　工学基礎 電磁気学	A–5　エネルギーと情報
4　工学基礎 熱力学・統計力学	A–6　物理情報計測
5　工学基礎 量子力学	A–7　エレクトロニクス素子
6　工学基礎 物性物理学	A–8　量子光学と量子情報科学

(A: Advanced)

まえがき

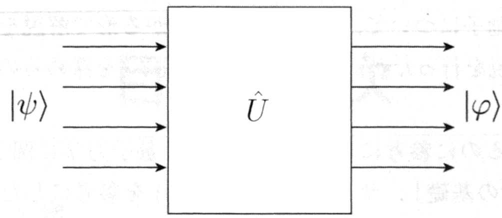
本書は基礎的な量子力学を学んだ理工系大学生・大学院生が，近代的な光学において量子力学がどのように応用されているかを学ぶための教科書あるいは参考書として執筆されたものである．したがって，ある程度量子力学の基礎を習得していることを前提としている．

広い意味でのナノテクノロジーの進歩により，人類が直接アプローチしうる領域は非常にミクロになり，現代科学技術で取り扱う対象は全て量子力学的領域に到達したといっても過言ではない．つまり，現代科学技術におけるパラダイムが古典力学から量子力学に移行しているとしてもよいであろう．そのような状況の中，光を量子力学的に捉え直した量子光学は量子力学的効果研究の良い土俵として広く用いられている．これは，固体系に比べ，光では量子状態を保持しやすいからである．

量子光学の応用として,「量子情報科学」が考えられている．量子情報科学とは，量子力学を情報科学と融合させ，新たな情報科学パラダイムを構築しようとするものである．その中心的主題は量子エンタングルメント (量子力学的不可分性) である．量子エンタングルメントは，古典力学的には不可能な操作を可能にする．量子光学では量子エンタングルメントを比較的容易に生成できるため，量子光学と量子情報科学は不可分な関係になりつつある．

筆者は東京大学大学院工学系研究科物理工学専攻において,「量子情報物理」という講義を担当し，主に修士１年生を対象に講義を行っている．そこでは，量子光学的観点から，量子情報科学を概観している．これは，量子光学的アプローチが実験的には一番進んでおり，問題点がクリアーになるためである．講義の経験から，本書では現象の理解のため，実験に関する記述に重点をおいた．式を追っただけの表面的な理解では，真の理解に到達するのは難しいからである．

本書の構成について述べる．次の図に示したように，量子情報処理とは入力



量子情報処理

状態 $|\psi\rangle$ を出力状態 $|\varphi\rangle$ にユニタリー変換することである．式で書くと，

$$|\varphi\rangle = \hat{U}|\psi\rangle \tag{1}$$

となる．後で述べるように，ユニタリー変換はハミルトニアン $\hat{H}$ を用いて

$$\hat{U} = e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t} \tag{2}$$

と書けるから，任意のユニタリー変換に相当する任意の量子情報処理操作を可能にするためには，任意のハミルトニアンが必要になる (計算機的にいえば，任意の「量子演算ゲート」が必要ということになる)．また，任意の量子情報処理操作を行うためには，初期状態 $|\psi\rangle$ をどのように選ぶか，あるいはどのように用意するかは非常に重要な問題である．さらに，ユニタリー変換器 (量子コンピュータ) の中で量子エンタングルメントが生成されて初めて古典的情報処理を凌駕できるので，量子エンタングルメントに関する理解は重要である．一方，量子光学とは，光の量子状態の生成と制御を研究する学問である．つまり，量子光学では，式 (1) を実現するための初期状態 $|\psi\rangle$，ユニタリー変換 $\hat{U}$，ユニタリー変換器の中で生じる量子エンタングルした状態の研究を，光を用いて行っていると言うこともできる．

このような背景から，本書では，前半で「量子光学」について解説し，後半で「量子情報物理」について解説するというスタイルを取った．前半で，量子情報処理の初期状態 $|\psi\rangle$ として用いることのできる光の状態，さらにそれを制御する物理過程をハミルトニアンおよびユニタリー変換の描像で解説した．また，光を用いた量子エンタングルメント生成法に関して詳しく述べた．後半では，前半で解説した光の量子状態，ユニタリー変換を用いて，いくつかの重要

な量子演算が可能となることを示した．また，前半では，光の場を理解するのに有用な調和振動子について，量子光学につながる形で解説を試みた．かなりこじつけ的な解説を行ったが，読者の理解 (混乱？) を深めるのに役立つことを期待している．

本書を執筆するのに参考にした本を挙げる．量子力学に関しては，清水 明 著「新版 量子論の基礎」，サイエンス社 (2004) を参考にした．もし量子力学の基礎で不明の点が出たら，この本を読むことを勧める．量子光学の基礎に関しては，C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg 著 *"Photons and Atoms —— Introduction to Quantum Electrodynamics"*, John-Wiley & Sons, Inc. (1989) および W. P. Schleich 著 *"Quantum Optics in Phase Space"*, WILEY-VCH (2001) を参考にした．また，量子情報科学の基礎に関しては，M. A. Nielsen, I. L. Chuang 著 *"Quantum Computation and Quantum Information"* を参考にしている．これらの本はとてもよく書けているので一読を勧める．

最後に，同じ専攻に属し学科の大先輩でもある藤原毅夫教授には本書の執筆を薦めていただき御礼申し上げたい．また，執筆に際して支えていただいた東京大学大学院工学系研究科物理工学専攻古澤研究室のメンバーに感謝したい．特に青木隆朗博士には筆者の執筆中に幾多の仕事を引き受けてもらい，非常に感謝している．また，家庭において支えてもらった妻の朝子には特に感謝している．さらに，博士課程の学生である米澤英宏君には原稿を読んでもらいコメントをいただいた．記して感謝したい．

2005 年 1 月

古澤　明

目　　次

1 量子光学

本章では，光の量子状態と制御に関して解説する．まず，光の量子状態を理解するのに必要な量子力学的調和振動子について解説する．次に，光の場を量子化する．ここでは，量子光学独特の方言 (因習) について述べる．さらに，これらを用いて種々の光の量子状態とその記述法について解説を行う．

1 章で学ぶ概念・キーワード

- コヒーレント状態
- スクイーズド状態
- ウィグナー関数
- 量子エンタングルメント

1.1 シュレディンガー描像とハイゼンベルク描像

まず量子力学の復習をする．量子力学の代表的描像としてシュレディンガー描像とハイゼンベルク描像があることはご存じのとおりである．系のハミルトニアンが時間に依存しないとき，

$$\hat{U}(t) = e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t} \tag{1.1}$$

のように時間発展演算子 $\hat{U}(t)$ を導入すれば，シュレーディンガー描像では系の時間 t 経過後の状態ベクトル $|\psi(t)\rangle$ は，初期状態ベクトルを $|\psi(0)\rangle$ として次式で書ける (いわゆるシュレディンガー方程式).

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)\,|\psi(0)\rangle \tag{1.2}$$

任意の物理量 $\hat{A}$ を時刻 t において測定したときの期待値 $\langle A\rangle_t$ は

$$\langle A\rangle_t = \langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle = \langle\psi(0)|\hat{U}^\dagger(t)\hat{A}\hat{U}(t)|\psi(0)\rangle \tag{1.3}$$

となるから，

$$\hat{A}_H(t) \equiv \hat{U}^\dagger(t)\hat{A}\hat{U}(t) \tag{1.4}$$

とおくと，

$$\langle A\rangle_t = \langle\psi(0)|\hat{A}_H(t)|\psi(0)\rangle \tag{1.5}$$

となり，シュレディンガー描像では演算子 $\hat{A}$ が時間変化せず状態ベクトル $|\psi(t)\rangle$ が時間変化するのに対し，ハイゼンベルク描像では演算子 $\hat{A}_H(t)$ が式 (1.4) に基づいて時間変化し，状態ベクトル自身は時間変化せず $|\psi(0)\rangle$ に留まり続けることになる．もちろん，どちらの描像に従っても最終的な観測の期待値 $\langle A\rangle_t$ は同じ値を与えるから，どちらをとるかは個人の好みである．ただ，ハイゼンベルク描像でスタートしたにも関わらず，途中からシュレディンガー描像のように扱うのは「反則」なので注意してほしい．

1.2 調和振動子

本題に入る前の準備運動をもう少し続けることにする．

恐らく量子力学を習っているときに繰り返し出てくる物理モデルは調和振動子であろう．また，これを理解していれば量子光学を乗り切ることができる．調和振動子とは，例えばバネ定数 $m\omega^2$ のバネが，図 1.1 のように片側が壁に固定され，もう片方が質量 m のおもりに固定されているような場合である (1 次元調和振動子)．もちろん，高校生の問題のように床との摩擦は無視する．バネの自然長 (力を加えていないときの長さ) からの変位を x とし，運動量を p とすれば，系の全エネルギー H つまり運動エネルギーと位置エネルギーの和はご存じのように次のように書ける．

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \tag{1.6}$$

これを正準量子化すると，系のハミルトニアン $\hat{H}$ は，

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 \tag{1.7}$$

となる．ここで，$\hat{x}$ と $\hat{p}$ は正準交換関係 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ を満たし，共役物理量演算子となっている．また，$\hat{x}$ の固有値を x，その固有ベクトルを $|x\rangle$ とし，$\hat{p}$ の固有値を p，その固有ベクトルを $|p\rangle$ とすれば，

$$\hat{x}\,|x\rangle = x\,|x\rangle \tag{1.8}$$

$$\hat{p}\,|p\rangle = p\,|p\rangle \tag{1.9}$$

ということになる．$|x\rangle$ および $|p\rangle$ は，それぞれ位置または運動量が確定してい

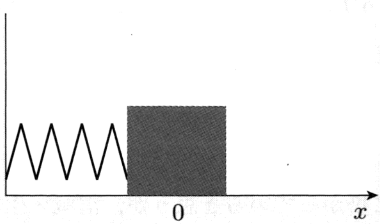


図 1.1 1 次元調和振動子の例

る状態であり，

$$\langle x'|x\rangle = \delta(x'-x) \tag{1.10}$$

$$\langle p'|p\rangle = \delta(p'-p) \tag{1.11}$$

のように直交している．また，これらは以下に示す完全性の条件を満たす[1]．

$$\int dx|x\rangle\langle x| = \hat{I} \tag{1.12}$$

$$\int dp|p\rangle\langle p| = \hat{I} \tag{1.13}$$

ただし，$\hat{I}$ は恒等変換である．

正準量子化の御利益は，消滅 (生成) 演算子 $\hat{a}$ ($\hat{a}^\dagger$) を定義できることである．これらの定義は，

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}\hat{p} \tag{1.14}$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}\hat{p} \tag{1.15}$$

である．また，系のハミルトニアン $\hat{H}$ は式 (1.7) より，

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \tag{1.16}$$

となり，$[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar$ および式 (1.14)，(1.15) より，

$$[\hat{a},\hat{a}^\dagger] = 1 \tag{1.17}$$

となる．ここで，お約束通り $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ を数演算子 $\hat{n}$ とすると，

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right) \tag{1.18}$$

となる．さらに，数演算子 $\hat{n}$ の固有値 n である固有状態を $|n\rangle$ とする．つまり，

$$\hat{n}\,|n\rangle = n\,|n\rangle \tag{1.19}$$

である．

これも何度もお目に掛かっていると思うが，消滅・生成演算子と数演算子の

---

1) 積分区間は $-\infty$ から ∞ までとする．これ以降，特に断らない限りこのようにする．

固有状態には次の関係がある (これが消滅・生成演算子というネーミングの起源である).

$$\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \tag{1.20}$$

$$\hat{a}^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \tag{1.21}$$

ただし，あとでもう一度注意するが，$\hat{a}$，$\hat{a}^\dagger$ はユニタリー演算子ではないので，式 (1.20)，(1.21) はユニタリー変換とはなっていない．つまり,「消滅」あるいは「生成」という過程は，シュレディンガーの方程式 (式 (1.2)) で記述できるような時間発展はしない．

同じ 1 次元調和振動子の運動について議論しているのに，位置演算子 $\hat{x}$，運動量演算子 $\hat{p}$ の固有値が任意の実数であるのに対し，数演算子 $\hat{n}$ の固有値が自然数のみというのは不自然であると感じるかもしれない．この「不自然さ」の起源について考える．

いわゆる時間に依存しないシュレディンガーの方程式，つまりエネルギー固有値・エネルギー固有状態を求める固有方程式は次のようなものである．

$$\hat{H}\,|\psi\rangle = E\,|\psi\rangle \tag{1.22}$$

ここで，調和振動子のハミルトニアンである式 (1.7) を用いると，上式は

$$\left(\frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2\right)|\psi\rangle = E|\psi\rangle \tag{1.23}$$

となる．次に，以下の関係式および式 (1.8)，(1.10) を用いて，式 (1.23) の左から $\langle x|$ を作用させた結果を計算する．

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle \tag{1.24}$$

$$|\psi\rangle = \int dx\psi(x)\,|x\rangle \tag{1.25}$$

$$\langle x|\hat{p}|\psi\rangle = -i\hbar\frac{d}{dx}\psi(x) \tag{1.26}$$

この結果，解くべき方程式は,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi(x) = E\psi(x) \tag{1.27}$$

となる．

例題 1.1

量子化された調和振動子の x に関する運動方程式 (シュレディンガーの方程式) が，式 (1.27) となることを確かめよ．

【解答】 式 (1.27) を確かめる前に，それに必要となる次の関係を導く．

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ixp/\hbar}$$

$\langle x|p\rangle = p(x)$ とすると，

$$\langle x|\hat{p}|p\rangle = p\langle x|p\rangle = p \cdot p(x)$$

これと式 (1.26) から[2)]，

$$-i\hbar \frac{dp(\hat{x})}{dx} = p \cdot p(x)$$

これを解くと，

$$p(x) = Ce^{ixp/\hbar}$$

となる．C を決めるための準備として，次の関係を式 (1.10)，(1.12) から導く．

$$\begin{aligned}\delta(x - x') = \langle x|x'\rangle &= \langle x| \left(\int dp|p\rangle\langle p| \right) |x'\rangle \\ &= \int dp\langle x|p\rangle\langle p|x'\rangle = \int dpp(x)p^*(x')\end{aligned}$$

ここで，$p^*(x')$ は $p(x')$ の複素共役である．したがって，

$$\delta(x - x') = |C|^2 \int dpe^{i(x-x')p/\hbar}$$

となり，デルタ関数の定義

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dpe^{ixp/\hbar}$$

を用いると，

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

となる．したがって，

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ixp/\hbar}$$

を導くことができた．

---

2) 式 (1.6) の証明は第 1 章の問題 1 の解答を参照.

次に式 (1.27) を確かめる．式 (1.23) の左から $\langle x|$ を作用させると，

$$\frac{1}{2m}\langle x|\hat{p}^2|\psi\rangle+\frac{m\omega^2}{2}\langle x|\hat{x}^2|\psi\rangle=E\langle x|\psi\rangle$$

となるが，問題は $\langle x|\hat{p}^2|\psi\rangle$ を計算することである．それは次のように行う．

$$\begin{aligned}
\langle x|\hat{p}^2|\psi\rangle &= \langle x|\hat{p}^2\left(\int dp|p\rangle\langle p|\right)|\psi\rangle \\
&= \langle x|\int dpp^2|p\rangle\langle p|\psi\rangle \\
&= \int dpp^2\langle x|p\rangle\langle p|\psi\rangle \\
&= \int dpp^2\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{ixp/\hbar}\langle p|\psi\rangle \\
&= \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2\frac{d^2}{dx^2}\int dp\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{ixp/\hbar}\langle p|\psi\rangle \\
&= \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2\frac{d^2}{dx^2}\int dp\langle x|p\rangle\langle p|\psi\rangle \\
&= \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2\frac{d^2}{dx^2}\langle x|\left(\int dp|p\rangle\langle p|\right)|\psi\rangle \\
&= \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2\frac{d^2}{dx^2}\langle x|\psi\rangle
\end{aligned}$$

この式と $\langle x|\hat{x}^2|\psi\rangle=x^2\langle x|\psi\rangle$ から，最終的に式 (1.27) を確かめることができる．

■

方程式 (1.27) の解法については，量子力学のどの教科書にも示されているので，ここでは結果のみを示すこととする．解 $\varphi_n(x)$ は n を自然数として，

$$\varphi_n(x)=\sqrt{\frac{1}{2^n n!}\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}}H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \tag{1.28}$$

となる．ここで，$H_n(\xi)$ はエルミートの多項式である．また，エネルギー固有関数 $\varphi_n(x)$ に対するエネルギー固有値 E_n は，もちろん

$$E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) \tag{1.29}$$

である．

このように，1次元調和振動子の位置と運動量は連続的に変化しうるが，エネルギーの取りうる値としては離散的になる．エネルギー固有関数 $\varphi_n(x)$ について考えてみよう[3]．例えば，$n=1$ のとき，$H_1(\xi)=2\xi$ であるから，位置 x での存在確率を意味する $|\varphi_1(x)|^2$ は図1.2のようになる．この図から，原点での存在確率は零で，$x=\pm\sqrt{\hbar/m\omega}$ 付近に存在確率のピークがあることがわかる．古典的な1次元調和振動子から想像すると，原点付近ではスピードが速くて存在確率が零なのに対し，振動が $x=\pm\sqrt{\hbar/m\omega}$ 付近で折り返し，そこではスピードは零となるから，存在確率が高いと考えるかもしれない．しかし，量子力学的な調和振動子ではそのようにはなっていない．そもそも折り返しの位置では，全てのエネルギーが位置エネルギーになるから，

$$\frac{1}{2}m\omega^2x^2 = E_1 - \frac{1}{2}\hbar\omega = \hbar\omega$$

より[4]，折り返しの位置は $\pm\sqrt{2\hbar/m\omega}$ となり，$\pm\sqrt{\hbar/m\omega}$ とはなっていない．

それでは，量子力学的な1次元調和振動子は (こじつけでも) どのように振動しているのであろうか．量子力学では状態の重ね合わせを許すことがその「謎」

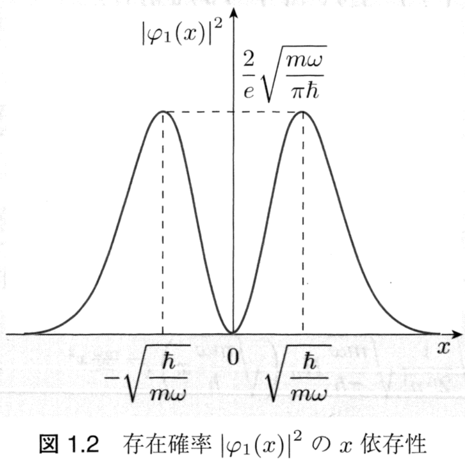


図 1.2 存在確率 $|\varphi_1(x)|^2$ の x 依存性

---

3) $\varphi_n(x)=\langle x|n\rangle$ であるから，$\varphi_n(x)$ は数状態ベクトル $|n\rangle$ の x 表示ということになる．

4) このような考え方は古典的な考え方であるから，あとで述べる「零点振動」の分である $\frac{1}{2}\hbar\omega$ を除いた．

を解く鍵となっている．エネルギー固有状態では，確定しているパラメーターはもちろんエネルギーだけであるから，その振動の位相は決まっていない．それでも古典的に考えると振動子は「1 つ」しかないから，その振動子のおもりがちょうど折り返しの位置にいるときは，エネルギーが全て位置エネルギーになっていることから実際の位置を計算することができる (運動量は零になっている)．逆におもりが原点にあるときは位置エネルギーが零となり，全て運動エネルギーになっていることから，そのときの運動量の値は簡単に計算できる．つまり，位置を決めれば運動量も自動的に決まってしまう．明らかにこれでは量子力学の根幹である「不確定性」に反する．

したがって，量子力学的な振動子ではもっと「特別のこと」が起こっているはずである．量子力学での「特別なこと」とは，振動の位相が確定しないエネルギー固有状態の場合，全ての取りうる位相の数だけ振動子があり，系 (つまり量子力学的振動子) がその重ね合わせの状態になっていることである (イメージを図 1.3 に示した)．そのように考えれば，古典的に考えるとちょうど半分が位置エネルギーで半分が運動エネルギーとなる位置 $\pm\sqrt{\hbar/m\omega}$ に最も存在確率が高くなるのもわかるような気がする?? いずれにしても，これらのイメージは，後述する単一光子状態 $|1\rangle$ を理解するのに役立つと思われる．

$n = 2$ のときは $H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2$ であるから，$|\varphi_2(x)|^2$ は図 1.4 のようになり，存在確率は 3 つのピークを持つようになる．つまり，$|\varphi_1(x)|^2$ において存

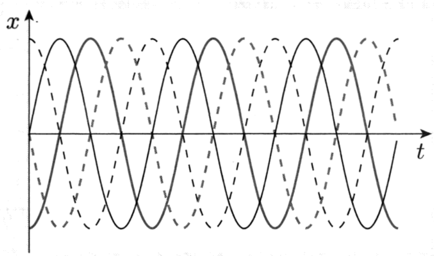


図 1.3　状態 $\varphi_1(x)$ における調和振動子のイメージ図
全ての取りうる位相の振動子の重ね合わせになっている．
つまり位相は全くの不確定である．

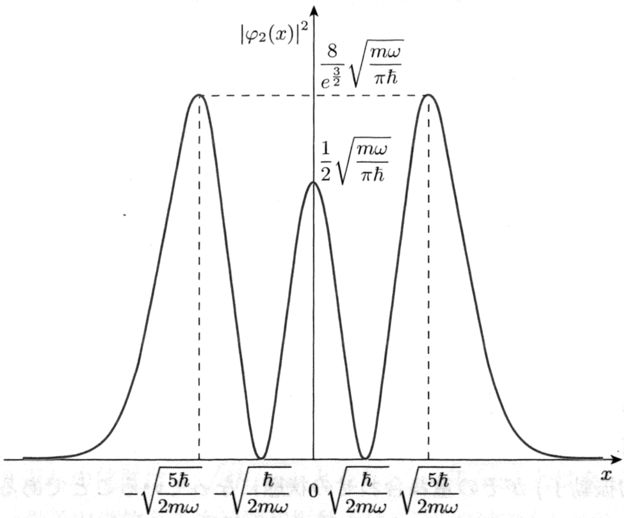


図 1.4 存在確率 $|\varphi_2(x)|^2$ の x 依存性

在した2つのピーク以外に，原点にもピークを持つようになる．これは次のように考えられる．$|\varphi_1(x)|^2$ のとき同様，位相が異なった無限個の振動子の重ね合わせという意味では似たようなものであるが，位相が反転した振動子が必ず対になって現れ，エネルギー的には振動子2つ分になる．イメージを図 1.5 に示す．

図 1.5 から，このような振動の場合，$|\varphi_1(x)|^2$ と同様に運動エネルギーと位置エネルギーが等しくなる点[5)] $\sqrt{5\hbar/2m\omega}$ にピークを持つ以外に，位相反転振動子が対になっている効果で原点にもピークを持つことが納得できる??

以上の話をすると決まって聞かれることがある．それは，$|\varphi_1(x)|^2$，$|\varphi_2(x)|^2$ のいずれもにおいて，系のエネルギーが全て位置エネルギーになったとしてもありえない x までバネが伸びたり縮んだりするのはなぜかということである．「零点振動」を考えて云々と言い訳はいえなくもないが，そもそも我々に現実感

5) ただし，$|\varphi_1(x)|^2$ とは異なり，「零点振動」を含めた全エネルギー $\frac{5}{2}\hbar\omega$ において，位置エネルギーと運動エネルギーが等しくなっている．これは「零点振動」も位相反転した2つが必ず対になって現れるからである．

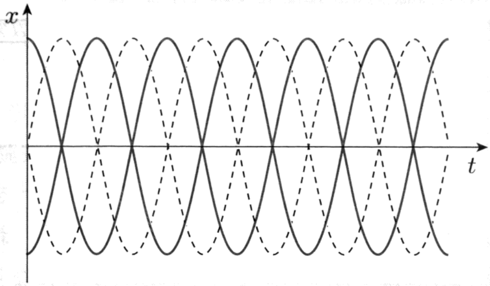


図 1.5　状態 $\varphi_2(x)$ における調和振動子のイメージ図
全ての取りうる位相の振動子の重ね合わせになっている．
つまり位相は全くの不確定である．ただし，位相反転した振動子が必ず対になって現れる．

のない「重ね合わせ」の話をしているので，この辺で「悪のり」はやめておいたほうがよさそうである[6)]．イメージ図は，イメージを与えるには役立つが，間違ったイメージを与える危険をはらんでいる諸刃の刃なのでこれ以上は深入りしない．しかし，このイメージは後で 2 光子状態 $|2\rangle$ を考えるときに役立つと思われる．

ここまでの議論は，位置 x で記述した波動関数 (x 表示の波動関数) について述べたが，同様な議論は運動量 p で記述した波動関数 (p 表示の波動関数) でもできる．そのためには，位置 x での議論と同様に，式 (1.23) の左から $\langle p|$ を作用させた結果を以下の関係式および式 (1.9)，(1.11) を用いて計算する．

$$\tilde{\psi}(p) = \langle p|\psi\rangle \tag{1.30}$$

$$|\psi\rangle = \int dp\tilde{\psi}(p)\,|p\rangle \tag{1.31}$$

この結果，解くべき方程式は，

$$-\frac{m\omega^2\hbar^2}{2}\frac{d^2\tilde{\psi}(p)}{dp^2} + \frac{1}{2m}p^2\tilde{\psi}(p) = E\tilde{\psi}(p) \tag{1.32}$$

---

6)　「重ね合わせ」には「干渉」まで存在し，我々が通常考える「混合」とは異なっている．その他種々のことがあるので，古典的な類推で押し通すのは危険である．

となる．この方程式は，式 (1.27) において，$x \to p/m\omega$ と変数変換すれば同じ方程式になるので，その解も式 (1.28) において，同じ変数変換をするだけである[7]．

準備が整ったので，エネルギー固有状態 $n = 0$ について考える (これは後で説明する真空場 $|0\rangle$ と同じである)．まず，位置 x 表示で波動関数 $\varphi_0(x)$ を考えることにする．$H_0(\xi) = 1$ と式 (1.28) を用いて $|\varphi_0(x)|^2$ を図示すると，図 1.6 のようになる．古典的にはエネルギー零の状態だから，おもりは原点に静止しているはずで，存在確率は原点が 1 でそれ以外が 0 になりそうなものである．しかし，量子力学はそれを許さず，最低エネルギー状態においてもいわゆる「零点振動」していることになっている．その様子が図 1.6 に示されており，原点の周りに存在確率がガウス分布している．また，分布の $1/e$ 幅 (半幅) は $\sqrt{\hbar/m\omega}$ となっている．同様にエネルギー固有状態 $n = 0$ を p 表示の波動関数 $\tilde{\varphi}_0(p)$ で考えると，図 1.7 のように，運動量の分布は原点 $(p = 0)$ にピークを持つ $1/e$ 幅が $\sqrt{m\hbar\omega}$ のガウス分布となっていることがわかる．

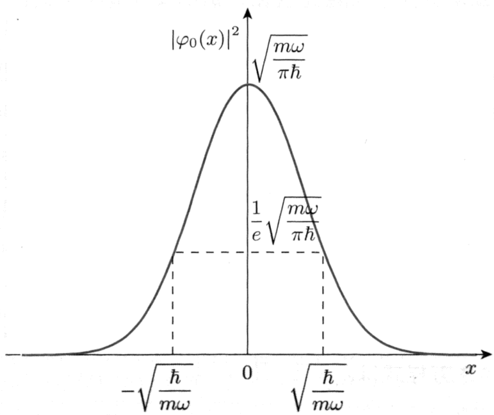


図 1.6 存在確率 $|\varphi_0(x)|^2$ の x 依存性

[7] 後で使うため，運動量表示のエネルギー固有関数を $\tilde{\varphi}_n(p)$ とする．

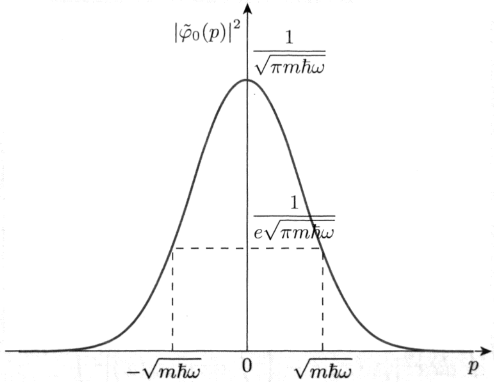


図 1.7 存在確率 $|\tilde{\varphi}_0(p)|^2$ の p 依存性

ここまでのことは，どの量子力学の教科書にも書いてあるが，次のことを考える．それは質量 m を変化させたときエネルギー固有状態 $n=0$ の x，p 表示の波動関数がどのように変わるかである[8)]．例えば，$m \to \infty$ の極限を考えよう．このとき，分布の $1/e$ 幅 $\sqrt{\hbar/m\omega}$ が無限小になるので，存在確率は原点のみに存在し，原点以外は零となる．つまり，位置が確定した状態 $|x=0\rangle$ になっている．古典的に考えても，おもりの質量が無限大になれば，振動子は運動し得ず，原点に留まることになる．量子力学でもそれに近いことが起こっていると解釈したくなる．

このときの運動量分布について考えてみよう．$m \to \infty$ のとき，運動量の分布幅 $\sqrt{m\hbar\omega}$ は発散するので，運動量については全く決まらなくなる．これは，無限の質量を持つおもりは，ほんの少しだけ速度を持つだけで，大きな運動量を持つようになると解釈できなくもない．いずれにしても，このようにおもりの質量を大きくして，存在確率の分布幅を小さくする行為を「位置スクイーズ」[9)]と呼ぶことにする．

---

8) 自動的にバネ定数も変化していることに注意．ただし，このお陰 (?) で共鳴 (角) 周波数 ω に変化はない．実際は，m を変化させても ω が変化しないように最初から仕組んでいる．

9) 位置方向に「絞る」(squeeze) という意味である．

同様に $m \to 0$ とすると，位置の分布幅は発散し，運動量分布は $p = 0$ の確率が1となりそれ以外は零となる．つまり，運動量の確定した状態 $|p = 0\rangle$ になる．これは，おもりの質量が零になれば，どんなスピードでおもりが動いても(光速に近づくといろいろありそうだが) 運動量が零であることに相当しているのかもしれない．いずれにしても，このようにおもりの質量を小さくして，運動量の分布幅を小さくする行為を「運動量スクイーズ」と呼ぶことにする．

ハイゼンベルクの不確定性について考える．エネルギー固有状態 $n = 0$ の位置 x，運動量 p の「ゆらぎ」Δx_0，Δp_0 を次式で定義する．

$$\Delta x_0 = \sqrt{\int dx x^2 |\varphi_0(x)|^2 - \left(\int dx x |\varphi_0(x)|^2\right)^2} \tag{1.33}$$

$$\Delta p_0 = \sqrt{\int dp p^2 |\tilde{\varphi}_0(p)|^2 - \left(\int dp p |\tilde{\varphi}_0(p)|^2\right)^2} \tag{1.34}$$

上式を実行すると，$\Delta x_0 = \sqrt{\dfrac{\hbar}{2m\omega}}$，$\Delta p_0 = \sqrt{\dfrac{m\hbar\omega}{2}}$ となるから，

$$\Delta x_0 \Delta p_0 = \frac{\hbar}{2} \tag{1.35}$$

となり，最小不確定状態であることがわかる．ここで，一般に演算子 $\hat{A}$ の「ゆらぎ」を $\Delta A \equiv \sqrt{\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2}$ で定義するとき，2つの演算子 $\hat{A}$，$\hat{B}$ には不確定性関係

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|$$

が成立するが，最小不確定状態とはこの等号が成立する場合である．また，先に宣伝しておくが，以上の議論は，後述する「スクイーズされた真空場」$\hat{S}(r)|0\rangle$ の場合と全く同じである．

例題 1.2

式 (1.33), (1.34) で定義される量子化された調和振動子のエネルギー固有状態 $n=0$ のゆらぎが, $\Delta x_0=\sqrt{\hbar/2m\omega}$, $\Delta p_0=\sqrt{m\hbar\omega/2}$ となることを示せ.

【解答】 $$\varphi_0(x)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

であるから,

$$\int dx x|\varphi_0(x)|^2=0$$

となり, Δx_0 を求めるには, $\int dx x^2|\varphi_0(x)|^2$ のみを計算すればよい.

$$\begin{aligned}\int dx x^2|\varphi_0(x)|^2&=\int dx x^2\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}\\&=\frac{\hbar}{2m\omega}\end{aligned}$$

ゆえに,

$$\Delta x_0=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

Δp_0 も同様. ■

最後に次のような場合を考える. 最初エネルギー固有状態 $n=0$ にあった図 1.1 の調和振動子の系において, 突然壁が x の正の方向へ $\sqrt{2\hbar/m\omega}\alpha$ だけ移動したとする. この場合,「突然」とは系の応答速度より十分速くという意味であり, この条件が満たされると, 系そのものはまだ図 1.6 のようなガウス分布を保ったままである. しかし, バネは $\sqrt{2\hbar/m\omega}\alpha$ だけ縮んでおり, 系としては次式で示される波動関数の状態となる.

$$\varphi_{\mathrm{coh}}(x)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x-\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\alpha\right)^2} \tag{1.36}$$

この状態は, 異なった n を持つエネルギー固有状態の重ね合わせ $\sum_{n=0}^{\infty}w_n\varphi_n(x)$ になっている[10]. また, 重ね合わせの係数 w_n は次式で表すことができる.

[10] エネルギー固有状態 $(n=0,1,2,\cdots)$ は基底をなすので, 任意の状態をこの重ね合わせで表すことができる.

$$w_n = \int dx \varphi_n(x) \varphi_{\mathrm{coh}}(x) \tag{1.37}$$

式 (1.28)，(1.36) と公式 $\int d\xi H_n(\xi) e^{-(\xi-\xi_0)^2} = \sqrt{\pi}(2\xi_0)^n$ を用いれば，

$$w_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \tag{1.38}$$

となる．エネルギー固有状態 $\varphi_n(x)$ をとる確率は $|w_n|^2$ だから，その確率は次式のようになる．

$$|w_n|^2 = \frac{(|\alpha|^2)^n}{n!} e^{-|\alpha|^2} \tag{1.39}$$

これはポアソン分布であるから，エネルギー固有状態 $\varphi_n(x)$ をとる確率はポアソン分布ということになる．

この例は調和振動子のポテンシャルが突然変化した場合といえるが，後で説明する光のコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ と等価である．

以上のように調和振動子の量子化を行うと量子力学の一通りのエッセンスを味わうことができる．また，次節で示すように，光の場は調和振動子と見なすことができるため，上の議論を光の場を用いて実際に実験できる．そろそろ準備運動も十分だと思われるので，本題である光の場の量子化に進むこととする．

1.3 電磁場の量子化

ここから量子光学について考える．まず第1にしなければならないのは，光の場 (電磁場) を量子化することである．しかし，これは大問題である．クーロン力などのポテンシャル由来の力が遠隔作用のため[11]，局所的な正準交換関係を満たす正準共役演算子 (一般化座標演算子 $\hat{\phi}(\boldsymbol{r})$，一般化運動量演算子 $\hat{\pi}(\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{r}$：場の座標) を定義できないためである．つまり，実空間ではどのように変数を選んでも，

$$[\hat{\phi}(\boldsymbol{r}), \hat{\pi}(\boldsymbol{r}')] \neq i\hbar\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{1.40}$$

となってしまう．

そこで，通常行われている電磁場のクーロンゲージによる正準量子化では，空間周波数 (つまり空間モード) へ空間フーリエ変換

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3 r e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} f(\boldsymbol{r})$$

を行ったいわゆる空間周波数空間 ($\boldsymbol{k}$ 空間) へ逃げる．ここへ逃げ込めば，マックスウェル方程式の空間微分が $i\boldsymbol{k}$ となるので種々の困難を回避できる．つまり，$\boldsymbol{k}$ 空間では

$$[\hat{\phi}(\boldsymbol{k}), \hat{\pi}(\boldsymbol{k}')] = i\hbar\delta^{(3)}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \tag{1.41}$$

を満たす正準共役演算子を探し当てることができる．ただし，物理量は実空間では実数であるが，空間フーリエ変換後は一般に複素数となることに注意が必要である．したがって，例えば以下に出てくる空間フーリエ変換したベクトルポテンシャル $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k},t)$ の成分は複素数となっている．

ここから真空中の電磁場の正準量子化の方法について説明していくが，厳密に説明していくと1冊の本になってしまうので，ここではエッセンスのみを述べる．

クーロンゲージでは，空間フーリエ変換したベクトルポテンシャル $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k},t)$ は「横波」($\boldsymbol{k}$ 方向の成分は零) となるから2次元のベクトルになり，2つの成

11) 早い話，静止している電荷のクーロンポテンシャルは光速を超えて瞬時に試験電荷に影響 (クーロン力) を与える．

分 (直交した2つの「直線偏光」や左右回りの「円偏光」) は添え字 $\sigma = 1, 2$ により区別できるとして，$\mathcal{A}_\sigma(\boldsymbol{k}, t)$ と書ける．このベクトルポテンシャルの2つの成分の時間微分 $\dot{\mathcal{A}}_\sigma(\boldsymbol{k}, t)$ を用いて，変数 $\pi_\sigma(\boldsymbol{k}, t)$ を次式のように定義する (ϵ_0 は真空の誘電率である)．

$$\pi_\sigma(\boldsymbol{k}, t) = \epsilon_0 \dot{\mathcal{A}}_\sigma(\boldsymbol{k}, t) \tag{1.42}$$

これは位置 x の時間微分で運動量 p を定義するようなものである[12]．また，実空間においてベクトルポテンシャルは実数であるという要請から，

$$\mathcal{A}^*_\sigma(\boldsymbol{k}, t) = \mathcal{A}_\sigma(-\boldsymbol{k}, t)$$

および

$$\pi^*_\sigma(\boldsymbol{k}, t) = \pi_\sigma(-\boldsymbol{k}, t)$$

となっている．

以上のような準備を行い，$\mathcal{A}_\sigma(\boldsymbol{k}, t)$ と $\pi^*_\sigma(\boldsymbol{k}, t)$ を正準変数とし量子化を行う．シュレディンガー描像を用いることとし，演算子は時間変化しないとすると，量子化の結果，次の正準交換関係を満たすようになる[13]．

$$[\hat{\mathcal{A}}_\sigma(\boldsymbol{k}), \hat{\pi}^\dagger_{\sigma'}(\boldsymbol{k}')] = i\hbar\delta_{\sigma\sigma'}\delta^{(3)}(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}') \tag{1.43}$$

$$[\hat{\mathcal{A}}_\sigma(\boldsymbol{k}), \hat{\pi}_{\sigma'}(\boldsymbol{k}')] = 0 \tag{1.44}$$

しつこいが，これらはエルミート演算子 (オブザーバブル) とはなっていないことに注意が必要である．また，

$$\hat{\mathcal{A}}^\dagger_\sigma(\boldsymbol{k}) = \hat{\mathcal{A}}_\sigma(-\boldsymbol{k}) \tag{1.45}$$

$$\hat{\pi}^\dagger_\sigma(\boldsymbol{k}) = \hat{\pi}_\sigma(-\boldsymbol{k}) \tag{1.46}$$

である．

このように正準共役演算子 (オブザーバブルではないが) を得ることができれば，勝ったも同然である．前節で復習したように正準共役演算子があれば，消

---

12) 繰り返しになるが，$\mathcal{A}_\sigma(\boldsymbol{k}, t)$ は複素数なので，位置 x とは直接比較できない．

13) これに到達するには，マックスウェルの方程式に基づいてラグランジアン密度を構成し，ハミルトンの運動方程式云々を議論しなければならない．詳しくは，C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg 著 "*Photon and Atoms*" を参照．

滅・生成演算子を定義できる．電磁場の場合，以下のように定義するのが合理的である．

$$\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}}\left[\omega_{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{A}}_\sigma(\boldsymbol{k}) + i\frac{1}{\epsilon_0}\hat{\pi}_\sigma(\boldsymbol{k})\right] \tag{1.47}$$

$$\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}}\left[\omega_{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{A}}^\dagger_\sigma(\boldsymbol{k}) - i\frac{1}{\epsilon_0}\hat{\pi}^\dagger_\sigma(\boldsymbol{k})\right] \tag{1.48}$$

ただし，$\omega_{\boldsymbol{k}} = c|\boldsymbol{k}|$ (c は光速) である．

また，これらより，

$$[\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma}, \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}'\sigma'}] = \delta_{\sigma\sigma'}\delta^{(3)}(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}') \tag{1.49}$$

$$[\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma}, \hat{a}_{\boldsymbol{k}'\sigma'}] = [\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma}, \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}'\sigma'}] = 0 \tag{1.50}$$

となり，ほぼ目的を達したといえる．

ただ，何度も注意したように $\hat{\boldsymbol{A}}_\sigma(\boldsymbol{k})$ や $\hat{\pi}^\dagger_\sigma(\boldsymbol{k})$ はエルミート演算子ではないため，物理的イメージを持ちようがない．せっかく正準量子化したのだから，位置と運動量のようなわかり易いイメージを持ちたいものである．この目的のため，空間逆フーリエ変換することにより，実空間での電場演算子 $\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})$ および磁束密度演算子 $\hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r})$ を構成する．

まず電場演算子 $\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})$ を導いてみよう．量子化する前の $\boldsymbol{k}$ 空間における電場 $\boldsymbol{\mathcal{E}}_\sigma(\boldsymbol{k})$ と変数 $\pi_\sigma(\boldsymbol{k})$ の関係は，マックスウエルの方程式から電場の単位偏光ベクトルを $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\sigma}$ として，

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_\sigma(\boldsymbol{k}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\sigma}\pi_\sigma(\boldsymbol{k})$$

となる．したがって，実空間での電場演算子 $\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})$ は次のように書ける (単に空間逆フーリエ変換しているだけである)．

$$\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\int d^3k\sum_{\sigma=1}^{2}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\sigma}\hat{\pi}_\sigma(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{1.51}$$

上式を式 (1.45)–(1.48) を用いて変形する．

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}(\hat{\boldsymbol{r}}) \\
&= -\frac{1}{2\epsilon_0}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3k \sum_{\sigma=1}^{2} \left[\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\sigma}\hat{\pi}_\sigma(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{e}_{-\boldsymbol{k}\sigma}\hat{\pi}_\sigma(-\boldsymbol{k})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right] \\
&= -\frac{1}{2\epsilon_0}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3k \sum_{\sigma=1}^{2} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\sigma} \left[\hat{\pi}_\sigma(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \hat{\pi}_\sigma^\dagger(\boldsymbol{k})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right] \\
&= i\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3k \sum_{\sigma=1}^{2} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{2\epsilon_0}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\sigma} \left(\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma}^\dagger e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right) \qquad (1.52)
\end{aligned}
$$

ただし，$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\sigma} = \boldsymbol{e}_{-\boldsymbol{k}\sigma}$ を用いた．この結果から，$\hat{\boldsymbol{E}}^\dagger(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})$ であることが確認できる (そのように仕組んだのだが)．$\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})$ がちゃんとエルミート演算子になっている．

例題 1.3

電場演算子 $\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})$ が，式 (1.52) となることを示せ．

【解答】 式 (1.51)，(1.52) より，

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) &= -\frac{1}{\epsilon_0}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3k \sum_{\sigma=1}^{2} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\sigma}\hat{\pi}_\sigma(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \\
&= -\frac{1}{2\epsilon_0}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3k \sum_{\sigma=1}^{2} \left[\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\sigma}\hat{\pi}_\sigma(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{e}_{-\boldsymbol{k}\sigma}\hat{\pi}_\sigma(-\boldsymbol{k})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right] \\
&= -\frac{1}{2\epsilon_0}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3k \sum_{\sigma=1}^{2} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\sigma} \left[\hat{\pi}_\sigma(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \hat{\pi}_\sigma^\dagger(\boldsymbol{k})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right] \\
&= -\frac{1}{2\epsilon_0}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3k \sum_{\sigma=1}^{2} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\sigma} \\
&\qquad \times \left[(-i\epsilon_0)\left(\sqrt{\frac{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{\epsilon_0}}\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma} - \omega_{\boldsymbol{k}}\hat{\mathcal{A}}_\sigma(\boldsymbol{k})\right)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right. \\
&\qquad\qquad \left. + i\epsilon_0\left(\sqrt{\frac{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{\epsilon_0}}\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma}^\dagger - \omega_{\boldsymbol{k}}\hat{\mathcal{A}}_\sigma^\dagger(\boldsymbol{k})\right)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= i\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3k \sum_{\sigma=1}^{2} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\sigma} \\
&\quad \times \left[\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{2\epsilon_0}} \left(\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \right) \right. \\
&\qquad \left. - \left(\omega_{\boldsymbol{k}} \hat{\mathcal{A}}_\sigma(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \omega_{\boldsymbol{k}} \hat{\mathcal{A}}^\dagger_\sigma(\boldsymbol{k}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \right) \right] \\
&= i\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3k \sum_{\sigma=1}^{2} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{2\epsilon_0}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\sigma} \left(\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \right)
\end{aligned}
$$

ただし，最後の等号は，

$$
\begin{aligned}
&\int d^3k \sum_{\sigma=1}^{2} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\sigma} \left(\omega_{\boldsymbol{k}} \hat{\mathcal{A}}_\sigma(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \omega_{\boldsymbol{k}} \hat{\mathcal{A}}^\dagger_\sigma(\boldsymbol{k}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \right) \\
&= \int d^3k \sum_{\sigma=1}^{2} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\sigma} \omega_{\boldsymbol{k}} \hat{\mathcal{A}}_\sigma(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \\
&\quad - \int d^3k \sum_{\sigma=1}^{2} \boldsymbol{e}_{-\boldsymbol{k}\sigma} \omega_{-\boldsymbol{k}} \hat{\mathcal{A}}_\sigma(-\boldsymbol{k}) e^{i(-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{r}} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

を用いている． ■

次に，$\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})$ と同様に磁束密度演算子 $\hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r})$ を導いてみよう．量子化する前の $\boldsymbol{k}$ 空間における磁束密度 $\boldsymbol{\mathcal{B}}_\sigma(\boldsymbol{k})$ とベクトルポテンシャル $\mathcal{A}_\sigma(\boldsymbol{k})$ の関係は，マックスウエルの方程式から

$$
\boldsymbol{\mathcal{B}}_\sigma(\boldsymbol{k}) = i\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\sigma} \mathcal{A}_\sigma(\boldsymbol{k})
$$

であるから，実空間での磁束密度演算子 $\hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r})$ は次のように書ける (これも $\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})$ のときと同様に空間逆フーリエ変換しているだけである)．

$$
\hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r}) = i\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3k \sum_{\sigma=1}^{2} \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\sigma} \hat{\mathcal{A}}_\sigma(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{1.53}
$$

上式を式 (1.45)–(1.48) を用いて変形する．

$$\hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r})$$
$$= \frac{i}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\int d^3k \sum_{\sigma=1}^{2}\left[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\sigma}\hat{\mathcal{A}}_\sigma(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + (-\boldsymbol{k})\times\boldsymbol{e}_{-\boldsymbol{k}\sigma}\hat{\mathcal{A}}_\sigma(-\boldsymbol{k})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right]$$
$$= \frac{i}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\int d^3k \sum_{\sigma=1}^{2}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\sigma}\left[\hat{\mathcal{A}}_\sigma(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \hat{\mathcal{A}}^\dagger_\sigma(\boldsymbol{k})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right]$$
$$= i\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\int d^3k \sum_{\sigma=1}^{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_{\boldsymbol{k}}}}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\sigma}\left(\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right) \tag{1.54}$$

もちろん，電場演算子のときと同様に，$\hat{\boldsymbol{B}}^\dagger(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r})$ であることが確認できる．つまり，$\hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r})$ もちゃんとエルミート演算子になっている．

以上のように実空間での電場演算子 $\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})$ および磁束密度演算子 $\hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r})$ が，モード $\boldsymbol{k}\sigma$ の消滅・生成演算子で書けることがわかる．

次に電磁場の総エネルギー (電場のエネルギー＋磁場のエネルギー) に相当するハミルトニアン $\hat{H}_{\mathrm{sys}}$ を求めてみよう．系のハミルトニアン $\hat{H}_{\mathrm{sys}}$ を次式とすることは自然である．

$$\hat{H}_{\mathrm{sys}} = \int d^3r\left(\frac{1}{2}\epsilon_0\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})\cdot\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) + \frac{1}{2\mu_0}\hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r})\cdot\hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r})\right) \tag{1.55}$$

式 (1.52)，(1.54) と，以下の関係を用いて上式を変形する．

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int d^3r e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}} = \delta^{(3)}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \tag{1.56}$$

その結果，系のハミルトニアン $\hat{H}_{\mathrm{sys}}$ は次式のようになる．

$$\hat{H}_{\mathrm{sys}} = \int d^3k \sum_{\sigma=1}^{2}\frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{2}\left(\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma}\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma} + \hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma}\right) \tag{1.57}$$

通常，$\hat{n}_{\boldsymbol{k}\sigma} = \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma}\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma}$ として上式を変形して議論することが多いが，そうすると式 (1.49) から明らかなように，積分の中に δ 関数を含むことになり，扱いが非常にデリケートになる．したがって，ここでは敢えてこの形で止めておく．

例題 1.4

真空中の電磁場のハミルトニアン $\hat{H}_{\mathrm{sys}}$ が，式 (1.57) となることを示せ．

【解答】 まず電場のエネルギーを求める．

$$
\begin{aligned}
&\int d^3r \frac{1}{2}\epsilon_0 \hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) \cdot \hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) \\
&= \int d^3r \frac{1}{2}\epsilon_0\, i \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3k \sum_{\sigma=1}^{2} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{2\epsilon_0}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\sigma} \left(\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right) \\
&\quad \cdot i \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3k' \sum_{\sigma'=1}^{2} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}'}}{2\epsilon_0}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}'\sigma'} \left(\hat{a}_{\boldsymbol{k}'\sigma'} e^{i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}} - \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}'\sigma'} e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}}\right) \\
&= \frac{1}{2} \int d^3r \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3k \int d^3k' \sum_{\sigma=1}^{2} \sum_{\sigma'=1}^{2} \frac{\hbar}{2} \sqrt{\omega_{\boldsymbol{k}}\omega_{\boldsymbol{k}'}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\sigma} \cdot \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}'\sigma'} \\
&\quad \times \Big[-\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma}\hat{a}_{\boldsymbol{k}'\sigma'} e^{i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}} + \hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}'\sigma'} e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}} \\
&\qquad + \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma}\hat{a}_{\boldsymbol{k}'\sigma'} e^{-i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}} - \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}'\sigma'} e^{-i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}} \Big] \\
&= \frac{1}{2} \int d^3k \int d^3k' \sum_{\sigma=1}^{2} \sum_{\sigma'=1}^{2} \frac{\hbar}{2} \sqrt{\omega_{\boldsymbol{k}}\omega_{\boldsymbol{k}'}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\sigma} \cdot \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}'\sigma'} \\
&\quad \times \Bigg[-\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma}\hat{a}_{\boldsymbol{k}'\sigma'} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3r e^{i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}} \\
&\qquad + \hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}'\sigma'} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3r e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}} \\
&\qquad + \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma}\hat{a}_{\boldsymbol{k}'\sigma'} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3r e^{-i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}} \\
&\qquad - \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}'\sigma'} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3r e^{-i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}} \Bigg] \\
&= \frac{1}{2} \int d^3k \int d^3k' \sum_{\sigma=1}^{2} \sum_{\sigma'=1}^{2} \frac{\hbar}{2} \sqrt{\omega_{\boldsymbol{k}}\omega_{\boldsymbol{k}'}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\sigma} \cdot \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}'\sigma'} \\
&\quad \times \Big[-\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma}\hat{a}_{\boldsymbol{k}'\sigma'} \delta^{(3)}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}') + \hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}'\sigma'} \delta^{(3)}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \\
&\qquad + \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma}\hat{a}_{\boldsymbol{k}'\sigma'} \delta^{(3)}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') - \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}'\sigma'} \delta^{(3)}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}') \Big] \\
&= \frac{1}{2} \int d^3k \sum_{\sigma=1}^{2} \frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{2} \left(\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma}\hat{a}_{-\boldsymbol{k}\sigma} + \hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma} + \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma}\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma} + \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma}\hat{a}^\dagger_{-\boldsymbol{k}\sigma} \right)
\end{aligned}
$$

磁場のエネルギーも同様にして，

$$\int d^3r \frac{1}{2\mu_0}\hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r})\cdot\hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r})$$
$$=\frac{1}{2}\int d^3k \sum_{\sigma=1}^{2}\frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{2}\Big(-\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma}\hat{a}_{-\boldsymbol{k}\sigma}+\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma}\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\sigma}+\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\sigma}\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma}-\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\sigma}\hat{a}^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\sigma}\Big)$$

となる．したがって，上の2式から，

$$\hat{H}_{\rm sys}=\int d^3k \sum_{\sigma=1}^{2}\frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{2}\left(\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\sigma}\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma}+\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma}\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\sigma}\right)$$

となる． ■

せっかくハミルトニアンを求めたので，早速使ってみよう．ここまでの話はシュレディンガー描像であったが，ハイゼンベルク描像で演算子を時間変化させることを考える．式 (1.4) から，ハイゼンベルク描像の電場演算子 $\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)$ は次式で与えられる．

$$\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)=e^{i\frac{\hat{H}_{\rm sys}}{\hbar}t}\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})e^{-i\frac{\hat{H}_{\rm sys}}{\hbar}t} \tag{1.58}$$

上式と式 (1.49)，(1.50)，(1.52)，(1.57) および次の関係式[14)]，

$$\begin{aligned} e^{i\omega(\hat{n}+\delta)t}\hat{a}e^{-i\omega(\hat{n}+\delta)t} &= e^{i\omega\hat{n}t}\hat{a}e^{-i\omega\hat{n}t} \qquad (\hat{n}=\hat{a}^{\dagger}\hat{a}) \\ &= \hat{a}e^{-i\omega t} \end{aligned} \tag{1.60}$$

を用いれば，ハイゼンベルク描像での電場演算子 $\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)$ は次式のようになる．

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)=i\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\int d^3k \sum_{\sigma=1}^{2}\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{2\epsilon_0}}\\ \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\sigma}\left[\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma}e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_{\boldsymbol{k}}t)}-\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\sigma}e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_{\boldsymbol{k}}t)}\right]\end{aligned} \tag{1.61}$$

同様にハイゼンベルク描像での磁束密度演算子 $\hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)$ は次式のようになる．

---

14) 次の公式を用いて導くことができる．

$$e^{\zeta\hat{B}}\hat{A}e^{-\zeta\hat{B}}=\hat{A}+\zeta[\hat{B},\hat{A}]+\frac{\zeta^2}{2!}[\hat{B},[\hat{B},\hat{A}]]+\cdots \tag{1.59}$$

$$\hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t) = i\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3k \sum_{\sigma=1}^{2} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_{\boldsymbol{k}}}}$$
$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\sigma} \left[\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_{\boldsymbol{k}}t)} - \hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\sigma} e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_{\boldsymbol{k}}t)}\right] \tag{1.62}$$

ここで，式 (1.61) や (1.62) を見ると，まるでモード $\boldsymbol{k}\sigma$ の複素振幅が消滅演算子 $\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma}$ となっているように見えなくもない (錯覚だが)．量子光学ではこれを良いことに「悪のり」をする．

次式のようにエルミート演算子 $\hat{x}_{\boldsymbol{k}\sigma}$，$\hat{p}_{\boldsymbol{k}\sigma}$ を定義する．

$$\hat{x}_{\boldsymbol{k}\sigma} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\boldsymbol{k}}}} \left(\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma} + \hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\sigma}\right) \tag{1.63}$$

$$\hat{p}_{\boldsymbol{k}\sigma} = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{2}} \left(\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma} - \hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\sigma}\right) \tag{1.64}$$

これらの交換関係は，式 (1.49) より

$$[\hat{x}_{\boldsymbol{k}\sigma}, \hat{p}_{\boldsymbol{k}\sigma}] = i\hbar\delta_{\sigma\sigma'}\delta^{(3)}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \tag{1.65}$$

となるから，場の「位置」と「運動量」の交換関係と同じ交換関係を満たしている ($\boldsymbol{k}$ 空間であるが)．

また，式 (1.63)，(1.64) を逆に解くと，

$$\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma} = \sqrt{\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{2\hbar}} \hat{x}_{\boldsymbol{k}\sigma} + i\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}} \hat{p}_{\boldsymbol{k}\sigma} \tag{1.66}$$

$$\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\sigma} = \sqrt{\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{2\hbar}} \hat{x}_{\boldsymbol{k}\sigma} - i\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}} \hat{p}_{\boldsymbol{k}\sigma} \tag{1.67}$$

となり，まるで式 (1.14)，(1.15) において，$m = 1$ としたように見える．これらのことから，量子光学では「悪のり」して，$\hat{x}_{\boldsymbol{k}\sigma}$ と $\hat{p}_{\boldsymbol{k}\sigma}$ を調和振動子の「位置」や「運動量」のように扱う．

$\hat{x}_{\boldsymbol{k}\sigma}$ と $\hat{p}_{\boldsymbol{k}\sigma}$ はエルミート演算子なので，その物理的対応があると思われる．それについて少し考えてみよう．式 (1.61) を $\hat{x}_{\boldsymbol{k}\sigma}$ と $\hat{p}_{\boldsymbol{k}\sigma}$ を用いて記述する．その結果，

$$\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t) = -\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3k \sum_{\sigma=1}^{2} \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\sigma} \Big[\omega_{\boldsymbol{k}} \hat{x}_{\boldsymbol{k}\sigma} \sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_{\boldsymbol{k}} t) + \hat{p}_{\boldsymbol{k}\sigma} \cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_{\boldsymbol{k}} t)\Big] \quad (1.68)$$

となるため，$\hat{x}_{\boldsymbol{k}\sigma}$ と $\hat{p}_{\boldsymbol{k}\sigma}$ はモード $\boldsymbol{k}\sigma$ の電場の直交位相成分振幅に対応しているといえる (多少言い過ぎの感はあるが).

ここで，量子光学における「因習」について触れる．量子光学では多くの実験がレーザーなどシングルモードに近いものを用いるため，多くの理論ではシングルモード，つまりただ1つのモード $\boldsymbol{k}\sigma$ のみが存在することとしている[15]．その場合 $\boldsymbol{k}\sigma$ を落とし，交換関係も $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ となる．また，適当な単位系を仮定し，$\hbar = \omega = 1$ あるいは $\hbar = 1/2$，$\omega = 1$ とすることが多い．それぞれの場合，$\hat{a} = (\hat{x} + i\hat{p})/\sqrt{2}$ あるいは $\hat{a} = \hat{x} + i\hat{p}$ となり，どちらを採用するかは個人の好みによる．ただし，本書では後者を採用し，以降，特に断らない限りシングルモード [無限大の空間的・時間的広がりを持つ平面電磁波 (進行波)] で考える．

以上をまとめると，本書では，

$$\hat{a} = \hat{x} + i\hat{p} \quad (1.69)$$

$$\hat{a}^\dagger = \hat{x} - i\hat{p} \quad (1.70)$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (1.71)$$

とする．また，ハイゼンベルク描像でのシングルモード電場演算子 $\hat{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t)$ および磁束密度演算子 $\hat{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t)$ は，式 (1.61)，(1.62)，(1.69)，(1.70) から

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t) &= \frac{i}{2}\boldsymbol{e}\left[\hat{a}e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} - \hat{a}^\dagger e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}\right] \\ &= -\boldsymbol{e}\left[\hat{x}\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t) + \hat{p}\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\right] \end{aligned} \quad (1.72)$$

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t) &= \frac{i}{2}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}\left[\hat{a}e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} - \hat{a}^\dagger e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}\right] \\ &= -\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}\left[\hat{x}\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t) + \hat{p}\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\right] \end{aligned} \quad (1.73)$$

---

[15] ただし，実世界には完全なシングルモード (無限大の時間的・空間的広がり) は存在しないから，これは近似に過ぎない．現実は「波束」であるため，空間的にも周波数的にもある程度の幅を持つマルチモードとなっている．

となる[16]．$\hat{x}$，$\hat{p}$ は調和振動子の「位置」,「運動量」に相当すると前に述べたが，例えば式 (1.72) に注目すれば，電場は時間とともに $\hat{x}$ 成分のみが存在する場合と $\hat{p}$ 成分のみが存在する場合の間を単調に繰り返している (振動している) ことがわかる．これは正に図 1.1 のような調和振動子において，エネルギーが全て「位置エネルギー」つまり $\hat{x}$ 成分に集中した状態 (バネが一番伸びたか縮んだ状態) と，全て「運動エネルギー」つまり $\hat{p}$ 成分に集中した状態 (バネが自然長の状態) との間の単振動となっている[17]．$\hat{x}$ と $\hat{p}$ を「位置」と「運動量」といっても，それほど見当違いではないことがわかると思う．

さらに量子光学ではもっと凄い「因習」がある．恐らくここまでの話は多少の無理はあっても大概の人は受け入れてくれると思うが，次からの話は受け入れがたい人もいるであろう．しかし，いわゆる「デファクトスタンダード」というやつで，現在の量子光学では次のようにすることが多い．

量子光学の因習 1

(1) $\hat{a}e^{-i\omega t} = \hat{a}(t)$ とし，これを時間変化する複素振幅のように扱う．

(2) $\hat{x}(t)$，$\hat{p}(t)$ を次式で定義し，

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2}\left[\hat{a}(t) + \hat{a}^\dagger(t)\right] \tag{1.74}$$

$$\hat{p}(t) = \frac{1}{2i}\left[\hat{a}(t) - \hat{a}^\dagger(t)\right] \tag{1.75}$$

これらを (時間変化する) 複素振幅の実部と虚部と考える．

これらは単に式 (1.60) の曲解[18]に過ぎないのだが,「デファクトスタンダード」になっており，いまさら抵抗しても多勢に無勢なので，敢えて逆らわないことにする．もちろん，こうすることでいろいろメリットがあることも確かなのだが，起源を知らないと「大火傷」することもある．これに従うと，式 (1.72), (1.73) は，

---

16) ここでは，$\omega = 1$ としているはずであるが，周波数を強調するために敢えて入れた．また $\epsilon_0 = 1$ としている．

17) ただし，単振動とはいっても，エネルギーの集中する位置は時間とともにずれていくから，進行波となっている．

18) 式 (1.61)，(1.62) を時間フーリエ変換と勝手に解釈している．

$$\hat{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t) = \frac{i}{2}\boldsymbol{e}\left[\hat{a}(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \hat{a}^{\dagger}(t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right] \tag{1.76}$$

$$\hat{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t) = \frac{i}{2}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}\left[\hat{a}(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \hat{a}^{\dagger}(t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right] \tag{1.77}$$

となる.「デファクトスタンダード」のメリットについては追々明らかになってくる.

例1 少しだけ「デファクトスタンダード」のメリットを享受してみよう.ここでは,定在波の電場演算子 $\hat{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{st}}(\boldsymbol{r},t)$ (モード $\boldsymbol{k}\sigma$ と $-\boldsymbol{k}\sigma$ の重ね合わせのモード) について考える.式 (1.61),(1.75) を用い,$\epsilon_0 = 1$ とすると,

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{st}}(\boldsymbol{r},t) &= \frac{i}{2}\boldsymbol{e}\left[\hat{a}(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \hat{a}^{\dagger}(t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right] \\ &\quad + \frac{i}{2}\boldsymbol{e}\left[\hat{a}(t)e^{i(-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{r}} - \hat{a}^{\dagger}(t)e^{-i(-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{r}}\right] \\ &= i\boldsymbol{e}\left[\hat{a}(t) - \hat{a}^{\dagger}(t)\right]\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) \\ &= -2\hat{p}(t)\boldsymbol{e}\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\end{aligned} \tag{1.78}$$

となり,同様に定在波の磁束密度演算子 $\hat{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{st}}(\boldsymbol{r},t)$ は,式 (1.62),(1.74) より,

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{st}}(\boldsymbol{r},t) &= \frac{i}{2}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}\left[\hat{a}(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \hat{a}^{\dagger}(t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right] \\ &\quad + \frac{i}{2}(-\boldsymbol{k})\times\boldsymbol{e}\left[\hat{a}(t)e^{i(-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{r}} - \hat{a}^{\dagger}(t)e^{-i(-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{r}}\right] \\ &= -\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}\left[\hat{a}(t) + \hat{a}^{\dagger}(t)\right]\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) \\ &= -2\hat{x}(t)\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\end{aligned} \tag{1.79}$$

となる.上の2式から,定在波で電場は $\hat{p}$ 成分,磁場は $\hat{x}$ 成分ということになる.また,この場合は調和振動子との関係で言えば,電場が「運動量」で,磁場が「位置」に相当し,シングルモードの進行波のときと同様,その間で「単振動」している (つまり,全てが電場エネルギーの状態と,全てが磁場エネルギーの状態の間を単調に振動している). □

1.4　時間発展としての物理過程

無理矢理でも電磁波の複素振幅演算子 $\hat{a}$ を手に入れたので，これを使って電磁波における種々の物理過程を記述することを考えよう．ただし，任意の物理過程を記述することは不可能なので，ここではユニタリー変換で記述できる，つまり式 (1.1) のように記述できる物理過程について考える．このような過程により物理量演算子 $\hat{A}$ は，式 (1.4) のように変換される．式から明らかであるが，このような物理過程はハミルトニアン $\hat{H}$ による時間発展と考えることができるので，種々のハミルトニアンについて考えればよいことになる．

最も基本的なハミルトニアンは，式 (1.57) をシングルモードにしたハミルトニアン $\hat{H}_{\mathrm{sys}}$,

$$\hat{H}_{\mathrm{sys}} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \tag{1.80}$$

であろう[19]．これは式 (1.57) の導出から明らかなように，真空中の電磁波の総エネルギーである．また，$\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ のように「光子数」演算子を導入すると便利である．この場合，ハミルトニアンは,

$$\hat{H}_{\mathrm{sys}} = \hbar\omega\left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right) \tag{1.81}$$

と書ける．

このハミルトニアンによる電場演算子の時間発展は式 (1.58) のようになり，シングルモードでは最終的に式 (1.72) のようになることは前節で述べた．式 (1.72) から明らかであるが，時間が t だけ経過すると，この時間発展により位相が ωt だけ変化する．つまり，真空中を電磁波が時間 t だけ伝播したとき，その位相が ωt だけ変化するという，古典的には「当たり前」のことを示している．同様に，屈折率が n の媒質中のハミルトニアン $\hat{H}_{n,\mathrm{sys}}$ は式 (1.55) より,

---

19) 本書では，$\hbar = \frac{1}{2}$, $\omega = 1$ としているから，$\hat{H}_{\mathrm{sys}} = \frac{1}{2}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$ である．これは，直交位相成分の振幅を $\hat{x}$, $\hat{p}$ ($\hat{a} = \hat{x} + i\hat{p}$) として，サイクル平均のエネルギーが $\frac{1}{2}\left(\hat{x}^2 + \hat{p}^2\right)$ であることに相当する．実際，$\frac{1}{2}\left(\hat{x}^2 + \hat{p}^2\right) = \frac{1}{2}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$ である．

$$\hat{H}_{n,\mathrm{sys}} = \frac{\hbar\omega}{n}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \tag{1.82}$$

となる．これも真空中と同様に，位相変化が $\omega t/n$ となるという「当たり前」のことを示している．

次に重要なハミルトニアンは，ビームスプリッターのハミルトニアン $\hat{H}_{\mathrm{BS}}$ であろう．ビームスプリッターとは，光を一部反射し残りを透過するものの総称であるが，普通のガラスは全てビームスプリッターである．物理的には屈折率の異なる媒質中に光が入射した場合，その一部が反射されることは高校でも習う (?) ことなので，特に説明する必要はないであろう．強いて言えば，空気の屈折率はほぼ 1 であるのに対し，通常のガラスの屈折率は 1.5 程度であることを思い出してもらえれば異論はないと思う．ただし，量子力学では，図 1.8 のようにつねに 2 入力 2 出力の「デバイス」となっている．この物理的意味は後で説明するので，ここではこのままハミルトニアンの説明を続けさせてもらいたい．

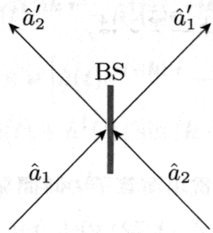


図 1.8 ビームスプリッター

ビームスプリッターの入出力関係，つまり $\hat{a}_1$，$\hat{a}_2$，$\hat{a}'_1$，$\hat{a}'_2$ の関係は，古典光学の類推から次式のように 2 行 2 列の行列 $\boldsymbol{B}$ で書ける．

$$\begin{bmatrix}\hat{a}'_1\\ \hat{a}'_2\end{bmatrix} = \boldsymbol{B}\begin{bmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{a}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{a}_2\end{bmatrix} \tag{1.83}$$

ただし，$\boldsymbol{B}$ は任意の行列ではなく，エネルギー保存の要請[20]である次式を満た

20) つまり入出力の間で光子数の変化はない．

さなければならない.

$$\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 = \hat{a}_1'^\dagger \hat{a}_1' + \hat{a}_2'^\dagger \hat{a}_2' \tag{1.84}$$

式 (1.84) から，$\boldsymbol{B}$ に関する条件は次のようになる.

$$|B_{11}|^2 + |B_{21}|^2 = |B_{12}|^2 + |B_{22}|^2 \tag{1.85}$$

$$B_{11}^* B_{12} + B_{21}^* B_{22} = 0 \tag{1.86}$$

これらの条件は行列 $\boldsymbol{B}$ がユニタリー行列 ($\boldsymbol{B}^\dagger \boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$) であることと等価である.

例題 1.5

ビームスプリッター行列の満たすべき条件が，式 (1.85)，(1.86) となることを示せ.

【解答】 式 (1.83)，(1.84) から，

$$\begin{aligned}
\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 &= \hat{a}_1'^\dagger \hat{a}_1' + \hat{a}_2'^\dagger \hat{a}_2' \\
&= (B_{11}^* \hat{a}_1^\dagger + B_{12}^* \hat{a}_2^\dagger)(B_{11}\hat{a}_1 + B_{12}\hat{a}_2) \\
&\quad + (B_{21}^* \hat{a}_1^\dagger + B_{22}^* \hat{a}_2^\dagger)(B_{21}\hat{a}_1 + B_{22}\hat{a}_2) \\
&= (|B_{11}|^2 + |B_{21}|^2)\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + (|B_{12}|^2 + |B_{22}|^2)\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \\
&\quad + (B_{11}^* B_{12} + B_{21}^* B_{22})\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + (B_{12}^* B_{11} + B_{22}^* B_{21})\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1
\end{aligned}$$

となるから，式 (1.85)，(1.86) は明らか. ■

任意の 2 次元のユニタリー行列は Λ，Ψ，Θ，Φ を任意の実数として次のように分解できることが知られている.

$$\boldsymbol{B} = e^{i\Lambda/2} \begin{bmatrix} e^{i\Psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Psi/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2) \\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\Phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Phi/2} \end{bmatrix} \tag{1.87}$$

Λ，Ψ，Φ は位相因子であるから，光学実験的には適当に調整できる．したがって，$\Lambda = \Psi = \Phi = 0$ とすることができるから，

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2) \\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2) \end{bmatrix} \tag{1.88}$$

としても物理的意味を損なうことはない．また，実験的には透過率を T，反射

率を R とすると

$$\sqrt{T} = \cos(\Theta/2), \quad \sqrt{R} = -\sin(\Theta/2) \quad (T + R = 1)$$

の関係があり，Θ の値は実験的に決めることができる．以上をまとめると，入射光の位相を適当に調整したビームスプリッターの行列は，T と R をそれぞれビームスプリッターの透過率と反射率として，

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \sqrt{T} & -\sqrt{R} \\ \sqrt{R} & \sqrt{T} \end{bmatrix} \tag{1.89}$$

と書ける．

実際の例で考えてみよう．例えば，モード1とモード2が同位相でビームスプリッターに入射したとし，$T = R = 0.5$ であるハーフビームスプリッターを考えよう．この場合，ビームスプリッターの行列 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{half}}$ は次式のようになる．

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{half}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.90}$$

したがって，入出力関係は，

$$\hat{a}_1' = \frac{\hat{a}_1}{\sqrt{2}} - \frac{\hat{a}_2}{\sqrt{2}} \tag{1.91}$$

$$\hat{a}_2' = \frac{\hat{a}_1}{\sqrt{2}} + \frac{\hat{a}_2}{\sqrt{2}} \tag{1.92}$$

となる．ここで，上の2つの式の右辺において $\hat{a}_2$ の符号が反転しているのはエネルギー保存の要請からであるが，もう少し物理的にいうと，この場合はモード2の入射が屈折率の小さな媒質から大きな媒質への入射となり，その反射のみ符号が反転した (固定端反射) と考えることができる．他の出力は透過か，屈折率の大きな媒質から小さな媒質へ入射したときの反射となるため位相の飛びはない．

次にビームスプリッターのハミルトニアンを導出しよう．おおもととなる式 (1.87) に戻って考える．入射する2モードの相対位相だけを考えることにし，式 (1.87) において $\Lambda = 0$ とすると，ビームスプリッターの行列は，

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \cos(\Theta/2)e^{i[(\Psi+\Phi)/2]} & \sin(\Theta/2)e^{i[(\Psi-\Phi)/2]} \\ -\sin(\Theta/2)e^{-i[(\Psi-\Phi)/2]} & \cos(\Theta/2)e^{-i[(\Psi+\Phi)/2]} \end{bmatrix} \tag{1.93}$$

となる．したがって，このときの入出力関係は，

$$\hat{a}_1' = \cos(\Theta/2)e^{i[(\Psi+\Phi)/2]}\hat{a}_1 + \sin(\Theta/2)e^{i[(\Psi-\Phi)/2]}\hat{a}_2 \tag{1.94}$$

$$\hat{a}_2' = -\sin(\Theta/2)e^{-i[(\Psi-\Phi)/2]}\hat{a}_1 + \cos(\Theta/2)e^{-i[(\Psi+\Phi)/2]}\hat{a}_2 \tag{1.95}$$

となり，それぞれのモードの全エネルギーに相当する光子数は，

$$\hat{a}_1'^\dagger\hat{a}_1' = T\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + (1-T)\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 - \sqrt{T(1-T)}\left(e^{-i\Phi}\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + e^{i\Phi}\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\right) \tag{1.96}$$

$$\hat{a}_2'^\dagger\hat{a}_2' = (1-T)\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + T\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + \sqrt{T(1-T)}\left(e^{-i\Phi}\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + e^{i\Phi}\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\right) \tag{1.97}$$

となる．ここで，

$$\sqrt{T} = \cos(\Theta/2), \quad \sqrt{R} = -\sin(\Theta/2) \quad (T+R=1)$$

の関係を再び用いた．式 (1.96)，(1.97) において，右辺の最初の 2 項は前述した位相を変えるのみのハミルトニアン $\hat{H}_{\rm sys}$ に相当するから，実際の相互作用ハミルトニアンとしてのビームスプリッターハミルトニアンは第 3 項のみを考えればよく，次式のようになる．

$$\hat{H}_{\rm int} = \frac{1}{2}\left(e^{-i\Phi}\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + e^{i\Phi}\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\right) \tag{1.98}$$

ただし，係数の 1/2 は後の議論とつじつまを合わせるために入れただけで，本質的な意味はない．

ここまでを頭に入れておいて，

$$\hat{L}_2 = \frac{1}{2i}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 - \hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\right) \tag{1.99}$$

とすると，次の関係がある[21)]．

$$e^{-i\Theta\hat{L}_2}\begin{bmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{a}_2\end{bmatrix}e^{i\Theta\hat{L}_2} = \begin{bmatrix}\cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2)\\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{a}_2\end{bmatrix} \tag{1.100}$$

これはまるで式 (1.98) において $\Phi = \pi/2$ とし (このとき $\hat{H}_{\rm int} = \hat{L}_2$)，

---

21) 式 (1.59) を用いる．

$\Theta = -t/\hbar$ としたときの時間発展の式となっている．したがって，(形式的に) $\hat{L}_2$ でビームスプリッターのハミルトニアンを代表させても，それほど問題はないと思われる．

ここまで，量子光学における物理過程に相当する重要なハミルトニアンとして，位相変化を記述するハミルトニアンとビームスプリッターのハミルトニアンについて述べてきた．そのほかにも，レーザーの状態であるコヒーレント状態 (後述) を生成する変位ハミルトニアン，スクイーズド状態を生成するハミルトニアン，量子非破壊測定などで重要となる光カー効果のハミルトニアンがある．これらについては後述する．

最後に，ビームスプリッターのユニタリー変換について補足しておく．上の議論で，ビームスプリッターのユニタリー変換は，特定の位相関係を満たすとき，$e^{i\Theta\hat{L}_2}$ となることを示した．式 (1.99) と同様に，

$$\hat{L}_0 = \frac{1}{2}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\right) \tag{1.101}$$

$$\hat{L}_1 = \frac{1}{2}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + \hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\right) \tag{1.102}$$

$$\hat{L}_3 = \frac{1}{2}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\right) \tag{1.103}$$

とすると，

$$e^{-i\Lambda\hat{L}_0}\begin{bmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{a}_2\end{bmatrix}e^{i\Lambda\hat{L}_0} = e^{i\frac{\Lambda}{2}}\begin{bmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{a}_2\end{bmatrix} \tag{1.104}$$

$$e^{-i\Phi\hat{L}_3}\begin{bmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{a}_2\end{bmatrix}e^{i\Phi\hat{L}_3} = \begin{bmatrix}e^{i\frac{\Phi}{2}} & 0\\ 0 & e^{-i\frac{\Phi}{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{a}_2\end{bmatrix} \tag{1.105}$$

となるから，一般の場合のビームスプリッターのユニタリー変換 (式 (1.87)) に相当する演算子 $\hat{B}$ は，

$$\hat{B} = e^{i\Phi\hat{L}_3}e^{i\Theta\hat{L}_2}e^{i\Psi\hat{L}_3}e^{i\Lambda\hat{L}_0} \tag{1.106}$$

となる．ちなみに，式 (1.99)，式 (1.101)–(1.103) から，$\hat{L}_i$ は角運動量演算子と同じ交換関係を満たすことがわかる．そのため，これらは光の角運動量演算子と呼ばれることがある．

1.5　コヒーレント状態

ここまで，演算子の議論に終始し，その固有状態については特に述べてこなかった．この節では，電磁場を量子化して(無理矢理)つくったシングルモード消滅演算子 $\hat{a}$(量子光学の因習では電場の複素振幅に相当)の固有状態であるコヒーレント状態について考える．固有値 $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$ に対する固有状態(コヒーレント状態) $|\alpha\rangle$ は当然ながら，次式を満たす．

$$\hat{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle \tag{1.107}$$

$$\langle\alpha|\hat{a}^\dagger = \langle\alpha|\,\alpha^* \tag{1.108}$$

ここで，式(1.72)，(1.107)，(1.108)から，コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ の電場の期待値は次式のようになる．

$$\begin{aligned}\langle\alpha|\hat{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t)|\alpha\rangle &= \frac{i}{2}\boldsymbol{e}\left[\alpha e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} - \alpha^\dagger e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}\right]\\ &= -|\alpha|\boldsymbol{e}\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t+\theta)\end{aligned} \tag{1.109}$$

つまり，コヒーレント状態の電場の期待値は複素振幅 α を持つ古典的電(磁)波となっていることがわかる．ただし，これはあくまでも期待値あるいは平均値であって，1回の測定による値ではない．1回の測定による値に関して，量子力学は多くを教えてくれないが，全く教えてくれない訳でもない．量子力学が教えてくれる1回の測定に関する情報は，期待値(平均値)のまわりにどれだけ分散するかである．それを「量子ゆらぎ」あるいは単に「ゆらぎ」と呼ぶことが多いようである．また，複素振幅は1回の測定で実部と虚部を同時に決めることはできない(だから，量子力学的にも直交位相成分の振幅が共役物理量になった)．したがって，1回の測定で決めることができるのは，せいぜい複素振幅の実部($\hat{x}$)あるいは虚部($\hat{p}$)だけである．コヒーレント状態の量子ゆらぎ Δx_{coh}，Δp_{coh} は，式(1.33)，(1.34)と同様に次式で定義される．

$$\Delta x_{\mathrm{coh}} = \sqrt{\langle\Delta\hat{x}^2\rangle_{\mathrm{coh}}} = \sqrt{\langle\alpha|\hat{x}^2|\alpha\rangle - \langle\alpha|\hat{x}|\alpha\rangle^2} \tag{1.110}$$

$$\Delta p_{\mathrm{coh}} = \sqrt{\langle\Delta\hat{p}^2\rangle_{\mathrm{coh}}} = \sqrt{\langle\alpha|\hat{p}^2|\alpha\rangle - \langle\alpha|\hat{p}|\alpha\rangle^2} \tag{1.111}$$

これらを計算するために以下の値を計算する．

$$\langle\alpha|\hat{x}^2|\alpha\rangle = \langle\alpha|\left(\frac{\hat{a}+\hat{a}^\dagger}{2}\right)^2|\alpha\rangle = [\Re(\alpha)]^2 + \frac{1}{4} \tag{1.112}$$

$$\langle\alpha|\hat{x}|\alpha\rangle = \langle\alpha|\frac{\hat{a}+\hat{a}^\dagger}{2}|\alpha\rangle = \Re(\alpha) \tag{1.113}$$

$$\langle\alpha|\hat{p}^2|\alpha\rangle = \langle\alpha|\left(\frac{\hat{a}-\hat{a}^\dagger}{2i}\right)^2|\alpha\rangle = [\Im(\alpha)]^2 + \frac{1}{4} \tag{1.114}$$

$$\langle\alpha|\hat{p}|\alpha\rangle = \langle\alpha|\frac{\hat{a}-\hat{a}^\dagger}{2i}|\alpha\rangle = \Im(\alpha) \tag{1.115}$$

ただし，$\hat{a}=\hat{x}+i\hat{p}$，$[\hat{a},\hat{a}^\dagger]=1$ および式 (1.107)，(1.108) を用いた．したがって，コヒーレント状態の量子ゆらぎ $\Delta x_{\rm coh}$，$\Delta p_{\rm coh}$ はそれぞれ，

$$\Delta x_{\rm coh} = \frac{1}{2} \tag{1.116}$$

$$\Delta p_{\rm coh} = \frac{1}{2} \tag{1.117}$$

となる．これはコヒーレント状態が，式 (1.35) と同様[22)]，最小不確定状態であることを示している．また，電場の期待値や分散を考慮してコヒーレント状態のイメージ図を書くと図 1.9，1.10 のようになる．

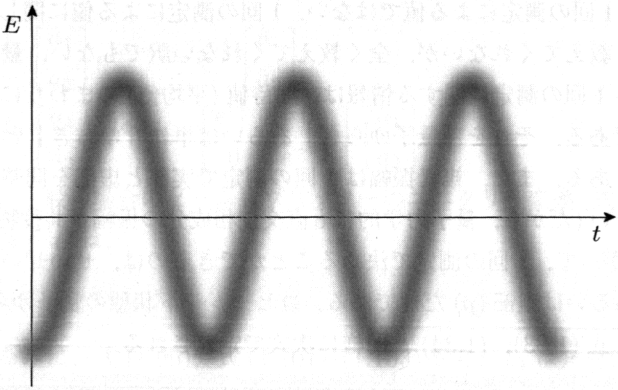


図 1.9 コヒーレント状態のイメージ図 (時間依存性)

---

22) $\hbar = 1/2$ としている．

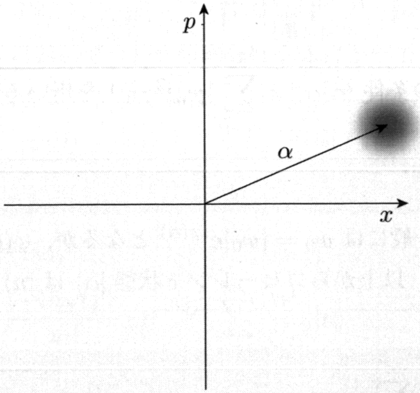


図 1.10 コヒーレント状態のイメージ図 (位相空間)

次にコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ の具体的なかたちを求めよう．光子数演算子 $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ の固有状態 $|n\rangle$ $(\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle)$ は基底をなすので，コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ も $|n\rangle$ で展開することができる．

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} w_n |n\rangle \tag{1.118}$$

この w_n を求めよう．まず定義から，

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha w_n |n\rangle \tag{1.119}$$

また，$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ を用いると，

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \hat{a}|n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \sqrt{n}|n-1\rangle \tag{1.120}$$

式 (1.119)，(1.120) の最右辺に左から $\langle m|$ を作用させると，

$$w_{m+1}\sqrt{m+1} = \alpha w_m \tag{1.121}$$

となるから，

$$w_m = \frac{\alpha}{\sqrt{m}} w_{m-1} = \frac{\alpha}{\sqrt{m}} \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{m-1}} \cdots \frac{\alpha}{1} w_0 \tag{1.122}$$

となる．したがって，

$$w_m = \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} w_0 \tag{1.123}$$

となるが，規格化の条件 $\langle\alpha|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |w_n|^2 = 1$ を用いると，

$$|w_0|^2 = e^{-|\alpha|^2} \tag{1.124}$$

となる．これから一般には $w_0 = |w_0|e^{i\varphi(\alpha)}$ となるが，$\varphi(\alpha) = 0$ としても特に問題は生じない[23]．以上からコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ は $|n\rangle$ を用いて以下のように書ける．

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \tag{1.125}$$

この式から明らかなように光子数 n の分布は

$$|w_n|^2 = \frac{(|\alpha|^2)^n}{n!} e^{-|\alpha|^2} \tag{1.126}$$

となり，ポアソン分布となっている．さらに，これは式 (1.39) と全く同じであり,「光子数」が調和振動子のエネルギー固有状態の番号に対応していることがわかる[24]．ポアソン分布であることの物理的意味は，光子それぞれは独立に飛来する (ランダムである) ということである．これは，光子それぞれの間で相関は存在しないということと等価である[25]．

もう少しコヒーレント状態の話を続けよう．式 (1.125) で表されたコヒーレント状態を式 (1.81) で表された真空中の電磁波のハミルトニアンで時間発展させてみよう．状態の時間発展はハミルトニアン $\hat{H}$ を用いて次のかたちで書ける (式 (1.2) を再掲)．

---

23) 絶対位相なるものは存在しない．

24) 本当のことをいうと「光子」なるものは存在せず,「光子数」は単なるエネルギー固有状態の番号といってもよいように思う．つまり，光子 1 個ではなく「単一光子状態」，光子 2 個ではなく「2 光子状態」といった具合である．

25) 逆に，ポアソン分布でなければ，光子間に相関が存在するということになる．例えば，後述するスクイーズド光はその例となっている．

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t}|\psi(0)\rangle \tag{1.127}$$

$\hat{H}_{\rm sys} = \hbar\omega(\hat{n}+1/2)$ において，1/2 の部分は全体にかかる位相因子しか変化させないからそれを無視すると，実効的なハミルトニアンは $\hbar\omega\hat{n}$ となる．これを式 (1.127) に代入し，$|\psi(0)\rangle = |\alpha\rangle$ とすると，時間 t 経過後の状態 $|\psi(t)\rangle$ は以下のようになる．

$$\begin{aligned}|\psi(t)\rangle &= e^{-i\hat{n}\omega t}|\alpha\rangle \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-i\hat{n}\omega t)^m}{m!}\cdot e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \\ &= |\alpha e^{-i\omega t}\rangle\end{aligned} \tag{1.128}$$

時間が t だけ経過すると，$|\alpha\rangle$ が $|\alpha e^{-i\omega t}\rangle$ に変化する．つまり，位相が ωt だけ変化するという古典光学的には当然の結果となる．イメージを図 1.11 に示す．位相空間 (平面) において，ωt だけ位相が変化している様子がわかる．

少し脇道にそれるが，$|n\rangle$ も時間発展させてみよう．

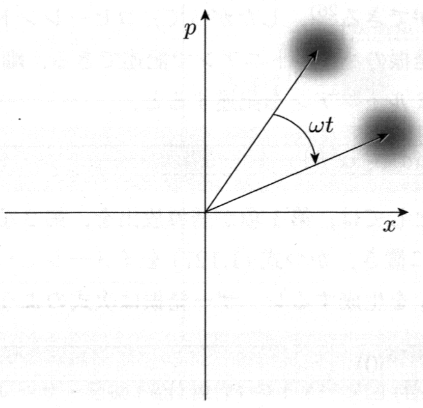


図 1.11 コヒーレント状態の時間発展のイメージ図 (位相空間)

$$e^{-i\hat{n}\omega t}\,|n\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i\hat{n}\omega t)^m}{m!}|n\rangle$$
$$= e^{-in\omega t}|n\rangle \tag{1.129}$$

上式から，$|n\rangle$ は時間が t だけ経過すると，$e^{-in\omega t}|n\rangle$ に変化することがわかる．面白いことに位相の変化が光子数に比例している．つまり，光子数状態においては位相変化が $n\omega t$ となっている．例えば，$n=2$ の場合，この光はコヒーレント状態にある (通常の) 光に比べ，位相が 2 倍の速さで変化する．見方を変えると，これは実質的に周波数が 2 倍つまり波長が半分になったことに相当し，波長に比例する回折限界は半分の値になる．したがって，顕微鏡の分解能が 2 倍になったり，リソグラフィーの解像度が 2 倍になったりするという御利益がある．現在，この御利益を利用する研究が行われている．また，式 (1.125) から，コヒーレント状態は位相変化が $n\omega t$ に比例する光子数状態の (コヒーレントな) 重ね合わせとなっていることがわかる．全く位相変化しない $|0\rangle$ から無限のスピードで位相変化する $|\infty\rangle$ まで，ある重みのもとに「平均」を取るとちょうど ωt で位相変化するようになるのである．何となく不思議な感じがするかもしれない．

コヒーレント状態を生成する物理過程について考えよう．ここまで顕わにしてこなかったが，レーザー光の状態はテクニカルノイズを除くとコヒーレント状態と考えることができる[26]．したがって，コヒーレント状態を生成する物理過程は，レーザー発振のハミルトニアンで記述できる．細かいことは無視して，レーザー発振のハミルトニアンを記述すると，

$$\hat{H}_{\rm laser} \propto i\left(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}\right) \tag{1.130}$$

となる．イメージとしては，第 1 項が誘導放出を，第 2 項が誘導吸収を表している．これを念頭に置き，かつ式 (1.127) をイメージしつつ，真空 $|0\rangle$ からコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ を生成するレーザー発振は次式のように書ける．

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}|0\rangle \tag{1.131}$$

---

26) レーザーには位相拡散があるが，全て同じレーザーで実験を行っている限り，その中では位相拡散は問題にならないため，コヒーレント状態とみなすことができる．

この式の等号は以下の Baker-Campbell-Hausdorff の公式から確かめることができる．

Baker-Campbell-Hausdorff の公式

$[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]=[\hat{B},[\hat{A},\hat{B}]]=0$ のとき，

$$e^{\hat{A}+\hat{B}}=e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-[\hat{A},\hat{B}]/2} \tag{1.132}$$

ここで，レーザー発振のユニタリー変換に相当する $e^{\alpha\hat{a}^\dagger-\alpha^*\hat{a}}$ を変位演算子 (displacement operator) $\hat{D}(\alpha)$ と定義する．つまり，

$$|\alpha\rangle=\hat{D}(\alpha)|0\rangle \tag{1.133}$$

である．ただし，本当はレーザー発振が変位操作の特別な場合で，説明の都合上，途を逆にたどってきた．つまり，真空 $|0\rangle$ をコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ へ変位させる操作をレーザー発振と呼ぶというのが本当のところである．レーザー発振，つまり真空 $|0\rangle$ のコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ への変位操作のイメージを図 1.12 に示す．図中に示したが，変位の大きさ (複素振幅) である α を誘導放出と考え，円の部分を自然放出と考えると物理的イメージをつかめるかもしれない．ただし，あくまでもイメージなので深入りは禁物である．

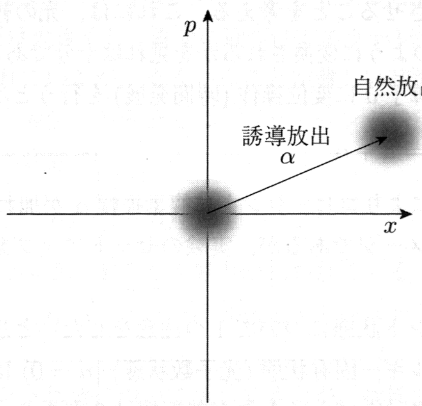


図 1.12　レーザー発振 (変位操作) のイメージ図 (位相空間)

例題 1.6

式 (1.131) を確認せよ.

【解答】 式 (1.132) を用いて計算する.

$$
\begin{aligned}
e^{\alpha\hat{a}^\dagger-\alpha^*\hat{a}}|0\rangle &= e^{\alpha\hat{a}^\dagger}e^{-\alpha^*\hat{a}}e^{-\frac{1}{2}[\ \alpha\hat{a}^\dagger,\ -\alpha^*\hat{a}\ ]}|0\rangle \\
&= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}e^{\alpha\hat{a}^\dagger}e^{-\alpha^*\hat{a}}|0\rangle \\
&= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle \\
&= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\hat{a}^{\dagger n}|0\rangle \\
&= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\sqrt{n!}|n\rangle \\
&= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \\
&= |\alpha\rangle
\end{aligned}
$$

■

変位演算子 $\hat{D}(\alpha)$ の性質について少し説明する. 式 (1.133) では, シュレディンガー描像で状態の変化として変位演算子 $\hat{D}(\alpha)$ を用いたが, ハイゼンベルク描像で演算子を変化させることを考える. これには, 光の複素振幅と見なせる消滅演算子 $\hat{a}$ が, どのように変換されるかを見れば十分である. 実際, ハイゼンベルク描像で消滅演算子 $\hat{a}$ に変位操作 (時間発展) を行うと次式のようになる.

$$\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha \tag{1.134}$$

これから, 変位操作によりコヒーレントに複素振幅 α が加わったように見える. これもあくまでもイメージであるが, 実験のセットアップを理解するには重要であるように思う.

ここで, コヒーレント状態について 1 つ注意をしたいと思う. コヒーレント状態 $|\alpha = 0\rangle$ とエネルギー固有状態 (光子数状態) $|n = 0\rangle$ は同じ状態であることである. 振幅を小さくしていくとやがて振幅は 0 となり, それは量子数 0 のエネルギー固有状態 (真空) になるのである. 当たり前ではあるが, これは意外に意味深長である. コヒーレント状態はその名前が示すように, 量子力学的にもコヒーレンシーを持つが, エネルギー固有状態にそのようなものはない. ま

た，式 (1.116)，(1.117) に α 依存性はないから，$\alpha = 0$ においても同じ量子ゆらぎを持つ．エネルギー固有状態的にいえば，これは零点振動といえる．このようにもともと違うものが，$\alpha = n = 0$ という極限で同じ状態となることは，種々の誤解の元となっている．例えば，$|\alpha = 1\rangle$ と $|n = 1\rangle$ は全く別の状態であることに注意しなければならない．

コヒーレント状態の重要な性質について触れておく．それは，2 つの異なったコヒーレント状態を $|\alpha\rangle$，$|\alpha'\rangle$ として，

$$|\langle\alpha|\alpha'\rangle|^2 = e^{-|\alpha-\alpha'|^2} \tag{1.135}$$

となることである[27]．この関係は，直交した 2 つのコヒーレント状態は存在しないことを示している．これだけ話すと，あまり重要な関係ではないと思うかもしれないが，かなり深刻な問題である．例えば，現在行われている光通信を考えてみよう．現在の光通信では，光が来ている状態を 1，来ていない状態を 0 としている (モールス信号のようなものである)．光源は一般にレーザーであるから，光が来ている状態をコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$，来ていない状態を真空 $|0\rangle$ と考えることができる．このとき，式 (1.135) から，$|\langle\alpha|0\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \neq 0$ であるから，これらは直交しない．直交しないということは，これらが完全には区別できないということであり，有限のエラーが存在するということである．実際は，$|\alpha|$ をできるだけ大きくし，直交に近づけてエラーレートをできるだけ小さくする努力がなされているが，そういうことが難しい状況も考えられる．そこで，いわゆる「量子通信」の分野では，コヒーレント状態を用いながらも，情報を直交する 2 つの状態[28]

$$|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle, \quad |\alpha\rangle - |-\alpha\rangle$$

に射影し，極限までエラーをなくす努力が払われている．

ここで，$|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle$，$|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle$ は後述するシュレディンガーの猫状態である．

以上，コヒーレント状態について話してきたが，次節ではもう 1 つの重要な状態であるスクイーズド状態に話を移そう．

---

[27] 式 (1.125) から簡単に確かめられる．

[28] 規格化定数を省略している．

1.6 スクイーズド状態

前節では，消滅演算子 $\hat{a}$ の固有状態であるコヒーレント状態について述べた．この節では，

$$\hat{b} = \mu\hat{a} + \nu\hat{a}^\dagger \quad (|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1)$$

の固有状態であるスクイーズド状態について述べる．$\hat{a}$ から $\hat{b}$ への変換は古くから知られており，ボゴリューボフ (Bogoliubov) 変換と呼ばれている．ボゴリューボフ変換は，もともと超伝導の BCS 理論において電子のクーパー対が生成される過程を表している．BCS 理論においてはフェルミ粒子である電子がペアになる過程を表していたが，スクイーズという物理過程においてはボーズ粒子である光子がペアになる過程を表している[29)]．

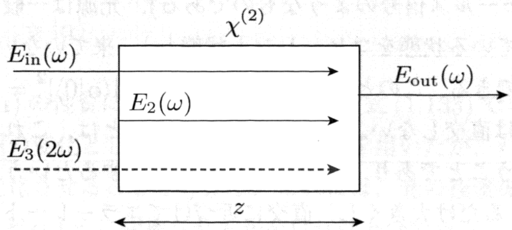


図 1.13 縮退パラメトリック過程

$\hat{a}$ から $\hat{b}$ への変換を物理的に実現する方法はいくつかあるが，最もよく研究されているのは縮退パラメトリック過程であろう．図 1.13 に縮退パラメトリック過程の概念を示す．縮退パラメトリック過程は，2 次の非線形光学定数を通じて，周波数 2ω の強いポンプ光 (複素振幅 E_3) と周波数 ω の入力光 $E_{\rm in}$ との差周波 $\omega = 2\omega - \omega$ の光 E_2 が生成され，$E_{\rm in}$ と E_2 のコヒーレントな重ね合わせとして $E_{\rm out}$ が放出されるものである．$E_{\rm in}$ と $E_{\rm out}$ の関係は次式のようになる．

$$E_{\rm out} = E_{\rm in}\cosh r - E_{\rm in}^*\sinh r \tag{1.136}$$

29) フェルミ粒子とボーズ粒子では交換関係が異なるため，符号に注意しなければならない．

ここで，

$$r = \frac{z}{2c} \cdot \frac{\omega}{n} \left| \chi^{(2)} E_3 \right| \tag{1.137}$$

である．ただし，z は非線形光学結晶の長さ，c は光速，n は非線形光学結晶の屈折率，$\chi^{(2)}$ は 2 次の非線形光学定数である．

$|\cosh r|^2 - |-\sinh r|^2 = 1$ であるから，式 (1.136) はボゴリューボフ変換のかたちになっている．いままで因習として行ってきたように，$\hat{a}$ を光の電場の複素振幅と考えれば，式 (1.136) は正にボゴリューボフ変換となる．したがって，縮退パラメトリック過程を用いれば，ボゴリューボフ変換を行うことができる．ただし，通常のバルク結晶を使った場合，r の値はあまり大きくできない．そこで通常の実験では，結晶を共振器中に入れ，実効的な結晶長 z を大きくすることにより，r の値を大きくする．イメージを図 1.14 に示す．

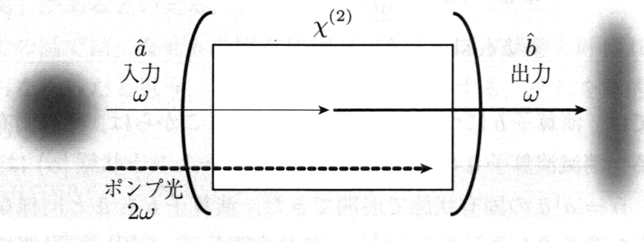


図 1.14 縮退パラメトリック過程と共振器を用いたボゴリューボフ変換–スクイーズ

縮退パラメトリック過程のハミルトニアン $\hat{H}_{\mathrm{para}}$ は次式のように書ける．

$$\hat{H}_{\mathrm{para}} \propto i \left(\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2} \right) \tag{1.138}$$

このハミルトニアンによるユニタリー変換 $e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t}$ は，次式のようなスクイーズ演算子 $\hat{S}(r)$ となる．

$$\hat{S}(r) = e^{\frac{r}{2}\left(\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2}\right)} \tag{1.139}$$

ここで，r はスクイージングパラメーターと呼ばれ，実験的には式 (1.137) から計算される．実際，このユニタリー変換 (時間発展) を複素振幅である $\hat{a}$ に施すと，

$$\hat{S}^\dagger(r)\hat{a}\hat{S}(r) = \hat{a}\cosh r - \hat{a}^\dagger \sinh r \tag{1.140}$$

となる[30].

例題 1.7

公式 (1.59) を用いて，式 (1.140) を確認せよ．

【解答】 式 (1.59) を用いて計算する．

$$\begin{aligned}
\hat{S}^\dagger(r)\hat{a}\hat{S}(r) &= e^{-\frac{r}{2}(\hat{a}^2-\hat{a}^{\dagger 2})}\hat{a}e^{\frac{r}{2}(\hat{a}^2-\hat{a}^{\dagger 2})} \\
&= \hat{a} + \left[-\frac{r}{2}(\hat{a}^2-\hat{a}^{\dagger 2}),\ \hat{a}\right] \\
&\quad + \frac{1}{2!}\left[-\frac{r}{2}(\hat{a}^2-\hat{a}^{\dagger 2}),\ \left[-\frac{r}{2}(\hat{a}^2-\hat{a}^{\dagger 2}),\ \hat{a}\right]\right] + \cdots \\
&= \hat{a} - r\hat{a}^\dagger + \frac{1}{2!}\left[-\frac{r}{2}(\hat{a}^2-\hat{a}^{\dagger 2}),\ -r\hat{a}^\dagger\right] + \cdots \\
&= \hat{a} - r\hat{a}^\dagger + \frac{r^2}{2!}\hat{a} + \cdots \\
&= \hat{a}\cosh r - \hat{a}^\dagger \sinh r
\end{aligned}$$

■

ここまでは，演算子 $\hat{b}$ についての話であった．ここからは，その固有状態について述べる．消滅演算子 $\hat{a}$ の固有状態であるコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ は式 (1.125) のように，$\hat{n}=\hat{a}^\dagger\hat{a}$ の固有状態で展開できた．演算子 $\hat{b}$ も $\hat{a}$ と同様な交換関係 $[\hat{b},\hat{b}^\dagger]=1$ を満たすため，$\hat{m}_g=\hat{b}^\dagger\hat{b}$ の固有状態 $|m_g\rangle$ を用いて展開できる．すなわち，演算子 $\hat{b}$ の固有状態を $|\beta\rangle_g$ とすれば，

$$|\beta\rangle_g = e^{-\frac{|\beta|^2}{2}}\sum_{m_g=0}^{\infty}\frac{\beta^{m_g}}{\sqrt{m_g!}}|m_g\rangle \tag{1.141}$$

となる (歴史的には2光子コヒーレント状態と呼ばれる所以[31]である)．ここで，一般的な $|\beta\rangle_g$ を $|n\rangle$ で展開できれば見通しが良いのだが，そのかたちは非常に複雑なため，実験的に最も意味のある $\beta=0$ の状態 ――「スクイーズされた真空場」―― についてのみ説明する．また，これもコヒーレント状態のときと同じであるが，$|\beta=0\rangle_g=|m_g=0\rangle$ である．

---

30) 再び式 (1.59) を用いた．

31) 全くの語呂合わせであるが，これを提唱したのは H. P. Yuen(ゆえん) (*Phys. Rev. A* **13**, 2226 (1976)) である．

真空場 $|0\rangle$ に式 (1.139) のユニタリー変換を施して生成されるスクイーズされた真空場 $|\beta=0\rangle_g$ を $|n\rangle$ で展開したときの展開係数 $\langle n|\beta=0\rangle_g$ は以下のようになる.

$$\langle n|\beta=0\rangle_g=\sqrt{\frac{\nu^n}{2^n n!\mu^{n+1}}}H_n(0) \tag{1.142}$$

ここで, $H_n(0)$ はエルミートの多項式である. これを用い, $\mu = \cosh r$, $\nu=\sinh r$ とすると, $|\beta=0\rangle_g$ は次式のように書ける.

$$|\beta=0\rangle_g=\frac{1}{\sqrt{\cosh r}}\left(|0\rangle-\frac{\tanh r}{\sqrt{2}}|2\rangle+\frac{\sqrt{6}(\tanh r)^2}{4}|4\rangle-\cdots\right) \tag{1.143}$$

この式からわかるように, スクイーズされた真空場とは, 偶数個の光子流である. このとき光子数分布は明らかにポアソン分布とはなっていないので, 光子間に「相関」があるといえる.

ここまでの話では, なぜ $\hat{b}$ の固有状態がスクイーズド状態と呼ばれる理由がよくわからなかったと思う. この理由について説明する. それを端的に示すのは次式である.

$$\hat{b}=\hat{a}\cosh r-\hat{a}^\dagger\sinh r=\hat{x}e^{-r}+i\hat{p}e^{r} \tag{1.144}$$

この式から xy 座標系が x 方向に縮んで, p 方向に伸びているように見える. しかし, これは単に演算子の形が変わっただけで, 我々が直接観測できる物理量に関して余り多くの情報を与えたことにはなっていない. そこで, 以下に示す計算を行ってみる.

スクイーズされた真空場 $|\beta=0\rangle_g$ と真空 $|0\rangle$ の関係は次式のようになっている[32].

$$|\beta=0\rangle_g=\hat{S}(r)|0\rangle \tag{1.145}$$

したがって, 我々が観測できる物理量の期待値 ${}_g\langle\beta{=}0|\hat{x}|\beta{=}0\rangle_g$, ${}_g\langle\beta{=}0|\hat{p}|\beta{=}0\rangle_g$ や, 分散 ${}_g\langle\beta=0|\hat{x}^2|\beta=0\rangle_g$, ${}_g\langle\beta=0|\hat{p}^2|\beta=0\rangle_g$ を式 (1.140) を用いて以下のように計算できる.

---

[32] 式 (1.139) の定義を用いて式 (1.145) の右辺を計算すれば, 式 (1.143) の右辺になる.

$$
\begin{aligned}
&{}_g\langle\beta=0|\hat{x}|\beta=0\rangle_g \\
&\quad=\langle 0|\hat{S}^\dagger(r)\hat{x}\hat{S}(r)|0\rangle \\
&\quad=\langle 0|\hat{S}^\dagger(r)\left(\frac{\hat{a}+\hat{a}^\dagger}{2}\right)\hat{S}(r)|0\rangle \\
&\quad=\langle 0|\frac{1}{2}\left(\hat{a}\cosh r-\hat{a}^\dagger\sinh r+\hat{a}^\dagger\cosh r-\hat{a}\sinh r\right)|0\rangle \\
&\quad=0
\end{aligned}
\tag{1.146}
$$

同様に

$$
{}_g\langle\beta=0|\hat{p}|\beta=0\rangle_g=0 \tag{1.147}
$$

さらに同様な計算により

$$
{}_g\langle\beta=0|\hat{x}^2|\beta=0\rangle_g=\frac{1}{4}e^{-2r} \tag{1.148}
$$

$$
{}_g\langle\beta=0|\hat{p}^2|\beta=0\rangle_g=\frac{1}{4}e^{2r} \tag{1.149}
$$

したがって，量子ゆらぎの値は式 (1.110)，(1.111) にならって計算でき，

$$
\Delta x_{\mathrm{sq}}=\frac{1}{2}e^{-r} \tag{1.150}
$$

$$
\Delta p_{\mathrm{sq}}=\frac{1}{2}e^{r} \tag{1.151}
$$

となる．これらの結果から，スクイーズされた真空場では x 成分と p 成分の期待値は 0 であり，通常の真空 $|0\rangle$ と同じであるが，量子ゆらぎが x 成分と p 成分で非対称になっていて通常の真空と異なることがわかる．また，$\Delta x_{\mathrm{sq}}\Delta p_{\mathrm{sq}}=1/4$ であり，最小不確定状態であることもわかる．これらをもとにしたスクイーズされた真空場のイメージを図 1.15 に示す．もうわかったと思うが,「スクイーズ」の名前は，このように量子ゆらぎが x 成分と p 成分で非対称になっていることに由来する．また，r をスクイージングパラメーターと呼ぶ．前述したように，このあたりの様子は,「零点振動」している調和振動子の質量 m を $m\to\infty$ としたときと全く同じである．

ここで，いつも受ける誤解について触れておく．スクイーズされた真空場は真空 $|0\rangle$ からスクイージング演算子 $\hat{S}(r)$ により生成され，振幅の期待値は零でかつ量子ゆらぎが x–p 成分間で「再配分」された状態である．ここまでは間違っていない．しかし，真空という，ある意味で何もない状態においてゆらぎ

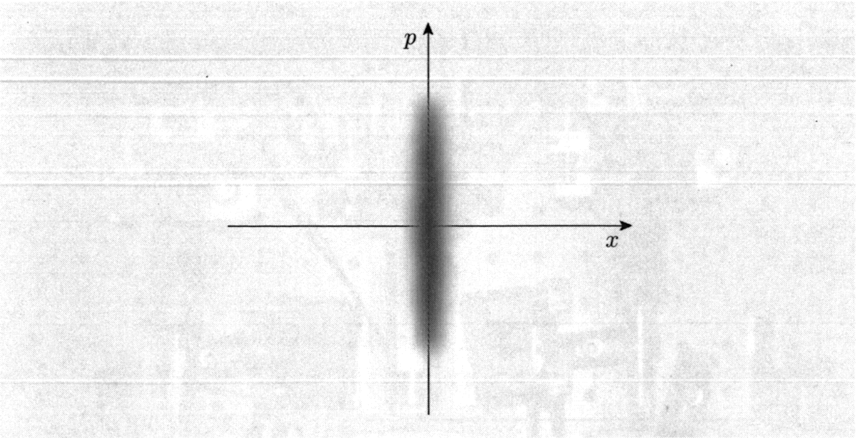


図 1.15　スクイーズされた真空場のイメージ図 (位相空間)

が再配分しただけで，エネルギーは真空と同じで何もなく，あたかも場が歪んでしまったと思うのは間違いである．スクイーズされた真空場は通常の光のようなエネルギー流 (光子流) であり，その統計性が異なっているだけのものである．間違っても SF 小説のように場が歪んでいるとは考えないでほしい．実際の実験でも，スクイーズされた真空場を発生させる光パラメトリック発振器 (共振器中に $\chi^{(2)}$ 物質を入れた図 1.14 のような装置) への入力は何もない真空 (零点振動) であるため，変な気がするが，ポンプ光からエネルギーが供給されていると考えれば，それほど眉唾ではないと思われる．

話を簡単にするために敢えて触れなかったが，ここまでの話は x 成分を「スクイーズ」していただけである．しかし，本来はそれに限定されるわけではなく，適当な位相因子を導入すれば任意の成分を「スクイーズ」できる．

最後にスクイーズされた真空場を生成する光パラメトリック発振器の写真を写真 1.1 に示す．

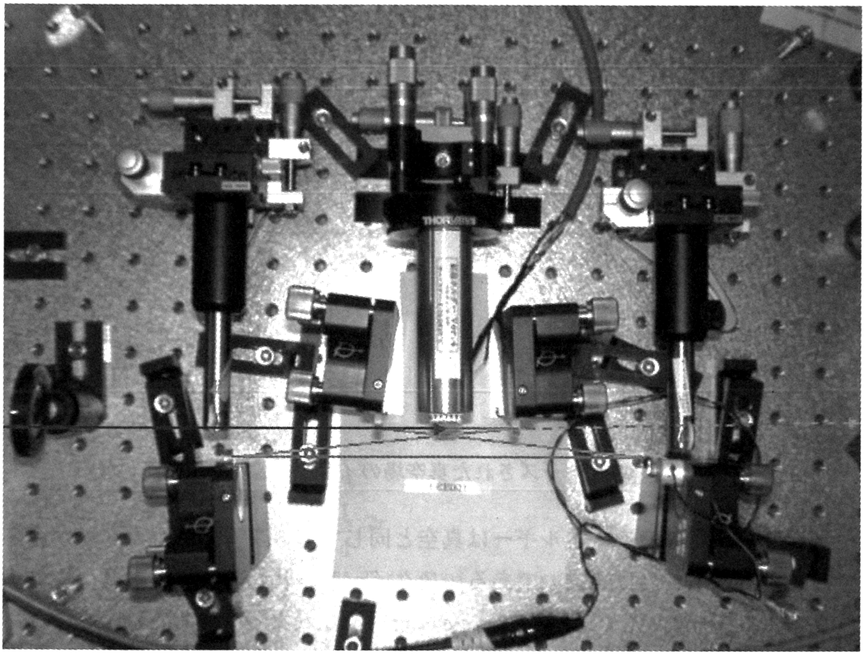


写真 1.1　光パラメトリック発振器
ここでは $\chi^{(2)}$ 物質として $KNbO_3$ を用い，ボウタイ型共振器 (4 つのミラーで構成される共振器) のビームウエスト位置に配置してある．ポンプ光として 430nm の光を用い，860nm のスクイーズされた真空場を生成している．

1.7 密度演算子

純粋に量子力学的状態は状態ベクトルで記述できるが，そうでない状態のほうが一般的である．それらを記述するのに密度演算子 $\hat{\rho}$ を導入しよう．密度演算子 $\hat{\rho}$ の定義は次式である．

$$\hat{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n| \tag{1.152}$$

ここで，ρ_n は状態 $|\psi_n\rangle$ を取る確率である．

例2 例としてコヒーレント状態の密度演算子を考えよう．コヒーレント状態は純粋状態なので密度演算子は次式のようになる．

$$\hat{\rho}_{\mathrm{coh}} = |\alpha\rangle\langle\alpha| \tag{1.153}$$

これを式 (1.125) を用いて光子数基底で展開すると，

$$\hat{\rho}_{\mathrm{coh}} = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n}^{\infty} \frac{(|\alpha|^2)^n}{n!} |n\rangle\langle n| + e^{-|\alpha|^2} \sum_{m \neq n} \frac{\alpha^m \alpha^{*n}}{\sqrt{m!n!}} |m\rangle\langle n| \tag{1.154}$$

コヒーレント状態の光子数 n の分布は $\langle n|\hat{\rho}|n\rangle$ であるから，

$$\langle n|\hat{\rho}|n\rangle = \frac{(|\alpha|^2)^n}{n!} e^{-|\alpha|^2} \tag{1.155}$$

となり，当然であるが式 (1.126) と同様ポアソン分布を示す．この計算から明らかであるが，光子数分布には式 (1.154) の右辺第 2 項つまり密度演算子の「非対角成分」は何の影響も与えていない．この部分は何を表しているのだろうか．式 (1.154) の右辺第 1 項は複素振幅である α の位相には無関係であるが，第 2 項は α の位相の関数になっている．逆にいうと，位相空間での位相を決めているのは式 (1.154) の右辺第 2 項である．そういった意味で密度演算子の非対角成分はコヒーレンスの源となっている． □

ある意味でコヒーレント状態と対極にあるのが，黒体輻射の状態である．黒体輻射の状態の密度演算子 $\hat{\rho}_{\mathrm{th}}$ は次式で与えられる．

$$\hat{\rho}_{\mathrm{th}} = \left(1 - e^{-\beta_{\mathrm{th}}}\right) \sum_{0}^{\infty} e^{-n\beta_{\mathrm{th}}} |n\rangle\langle n| \tag{1.156}$$

ここで，$\beta_{\mathrm{th}} = \dfrac{\hbar\omega}{k_{\mathrm{B}}T}$ であり，k_{B} はボルツマン定数，T は黒体の温度である．この状態における光子統計は，$\langle n|\hat{\rho}_{\mathrm{th}}|n\rangle$ を計算すると，$\left(1 - e^{-\beta_{\mathrm{th}}}\right) e^{-n\beta_{\mathrm{th}}}$ となり，ボルツマン分布となる．この状態の密度演算子に非対角成分は存在しないからコヒーレンスは存在しない．

1.8　光の量子力学的測定——バランス型ホモダイン測定

光の量子的性質を明らかにする測定の1つとしてフォトンカウンティング (光子数識別) 測定がある．これは光子数演算子 $\hat{n}$ の固有状態 $|n\rangle$ への射影と考えることができる．したがって，例えばコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ に対して真の意味でのフォトンカウンティング測定を行えば，式 (1.155) で表されるようなポアソン分布の光子統計を得ることができる．ただし，真の意味でのフォトンカウンターは世の中に存在しないから，このような測定は現時点では不可能である．

それに対し，理想に近い量子力学的測定を可能とするのが，バランス型ホモダイン測定と呼ばれる測定法である．バランス型ホモダイン測定の原理図を図1.16に示す．測りたい光を $\hat{a}_1$ とすると $\hat{a}_2$ は通常十分に高い強度を持つようにする．これらをハーフビームスプリッター上で合波し，2つの出力光強度を測定する．ハーフビームスプリッターにおける入出力関係は式 (1.91)，(1.92) で与えられるから，光強度演算子 $\hat{I}_1$，$\hat{I}_2$ はそれぞれ，

$$
\begin{aligned}
\hat{I}_1 &= \hat{a}_1'^{\dagger}\hat{a}_1' \\
&= \frac{1}{2}\left(\hat{a}_1^{\dagger}\hat{a}_1 + \hat{a}_2^{\dagger}\hat{a}_2 - \hat{a}_1^{\dagger}\hat{a}_2 - \hat{a}_1\hat{a}_2^{\dagger}\right)
\end{aligned}
\tag{1.157}
$$

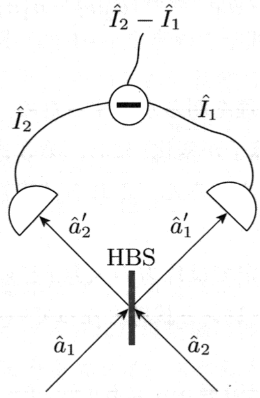


図 1.16　バランス型ホモダイン測定
ここで HBS はハーフビームスプリッターである．

$$\hat{I}_2 = \hat{a}_2'^{\dagger}\hat{a}_2'$$
$$= \frac{1}{2}\left(\hat{a}_1^{\dagger}\hat{a}_1 + \hat{a}_2^{\dagger}\hat{a}_2 + \hat{a}_1^{\dagger}\hat{a}_2 + \hat{a}_1\hat{a}_2^{\dagger}\right) \tag{1.158}$$

となる．バランス型ホモダイン測定としては，$\hat{I}_2 - \hat{I}_1$ を測定することになるから，次式を測定することになる．

$$\hat{I}_2 - \hat{I}_1 = \hat{a}_1^{\dagger}\hat{a}_2 + \hat{a}_1\hat{a}_2^{\dagger} \tag{1.159}$$

ここで復習を兼ねてビームスプリッター出力の測定について考えてみる．1.4 節で説明したように，式 (1.99) の $\hat{L}_2$ を用いて，ビームスプリッターのユニタリー変換 $\hat{U}_{\rm BS}$ は，

$$\hat{U}_{\rm BS} = e^{i\Theta\hat{L}_2} \tag{1.160}$$

であるから，ビームスプリッターの2つの入力状態を $|\psi\rangle_1$，$|\varphi\rangle_2$ (つまり入力全体としては $|\psi\rangle_1 \otimes |\varphi\rangle_2$[33]) とすると，その出力は $e^{i\Theta\hat{L}_2}|\psi\rangle_1 \otimes |\varphi\rangle_2$ となる．したがって，ビームスプリッター出力をバランス型ホモダイン測定するということは，

$$\begin{aligned}\langle\hat{I}_2 - \hat{I}_1\rangle &= {}_2\langle\varphi| \otimes {}_1\langle\psi|(\hat{I}_2 - \hat{I}_1)|\psi\rangle_1 \otimes |\varphi\rangle_2 \\ &= {}_2\langle\varphi| \otimes {}_1\langle\psi|(\hat{a}_1^{\dagger}\hat{a}_2 + \hat{a}_1\hat{a}_2^{\dagger})|\psi\rangle_1 \otimes |\varphi\rangle_2 \\ &= {}_2\langle\varphi| \otimes {}_1\langle\psi|e^{-i\Theta\hat{L}_2}(\hat{a}_2^{\dagger}\hat{a}_2 - \hat{a}_1^{\dagger}\hat{a}_1)e^{i\Theta\hat{L}_2}|\psi\rangle_1 \otimes |\varphi\rangle_2\end{aligned} \tag{1.161}$$

を求めることである[34]．物理を明らかにするため，敢えて上式の右辺第2式をハイゼンベルク描像的 (演算子が変化) にし，第3式をシュレーディンガー描像的 (状態が変化) に書いた．もちろん，これらは等号で結ばれているからどちらで計算してもよい．

バランス型ホモダイン測定では片方の入力 (どちらでもよいがここではモード2としている) が，コヒーレント状態となっている (これをローカルオシレー

---

33) $\otimes$ は直積を表す．モード1が状態 $|\psi\rangle_1$ にありかつモード2が状態 $|\varphi\rangle_2$ にあるという意味である．

34) ハーフビームスプリッターなので，$\Theta = -\pi/2$ とした．また，式 (1.99) を用いると，右辺第2式と第3式の間の等号を確かめることができる．

ター光と呼ぶ). つまり, $|\varphi\rangle_2 = |\alpha\rangle_2$ である. このとき, 式 (1.107), (1.108) を用いて, 式 (1.161) を計算すると

$$\begin{aligned}\langle \hat{I}_2 - \hat{I}_1 \rangle &= {}_2\langle\varphi| \otimes {}_1\langle\psi|(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger)|\psi\rangle_1 \otimes |\varphi\rangle_2 \\ &= {}_1\langle\psi|\hat{a}_1^\dagger|\psi\rangle_1 \cdot {}_2\langle\alpha|\hat{a}_2|\alpha\rangle_2 + {}_1\langle\psi|\hat{a}_1|\psi\rangle_1 \cdot {}_2\langle\alpha|\hat{a}_2^\dagger|\alpha\rangle_2 \\ &= {}_1\langle\psi|\hat{a}_1^\dagger|\psi\rangle_1 \alpha + {}_1\langle\psi|\hat{a}_1|\psi\rangle_1 \alpha^* \end{aligned} \tag{1.162}$$

となる. ここで, $\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$ とすると, 上式は,

$$\begin{aligned}\langle \hat{I}_2 - \hat{I}_1 \rangle &= 2|\alpha| \Big({}_1\langle\psi|\hat{x}_1|\psi\rangle_1 \cos\theta + {}_1\langle\psi|\hat{p}_1|\psi\rangle_1 \sin\theta \Big) \\ &= 2|\alpha| \cdot {}_1\langle\psi|(\hat{x}_1 \cos\theta + \hat{p}_1 \sin\theta)|\psi\rangle_1 \end{aligned} \tag{1.163}$$

となる. ここで, $\hat{a}_1 = \hat{x}_1 + i\hat{p}_1$ であることを用いた. この結果から, バランス型ホモダイン測定は, 入力の x 成分や p 成分の $2|\alpha|$ 倍をローカルオシレーター光の位相に応じて出力することになる. つまり, 位相敏感な測定となっている. また, ローカルオシレーター光の強度は検出器が飽和するまでは強くできるから, 入力 (モード 1) の強度が単一光子レベルでも検出可能となる[35].

ここで 1 つ注意をしておく. バランス型ホモダイン測定の説明のくだりでよくお目にかかる記述は,「ローカルオシレーター光は十分強いので, 演算子 $\hat{a}$ を c 数である α に置き換えることができる」なるものであるが, これは誤解の多い表現である. 筆者は初めてこの表現に出会ったときにとても戸惑った. なぜなら, 量子力学は c 数である $\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$ を求める学問であるのに, 突然演算子を c 数に置き換えられてしまうと,「そのときの状態は？」とか,「これはハイゼンベルク描像？ それともシュレディンガー描像？」など多くの疑問が浮かんできて, 収集がつかなくなるからである. 本当にいわんとしていることは, 単に式 (1.163) の内容だけなので注意してほしい. 賢明な読者は使わないほうがよいと思う.

次に実際にこのバランス型ホモダイン測定を行ってみよう. この測定の特徴が出せる一番よい例はスクイーズされた真空場のゆらぎの大きさ (分散) を測定することである. これは, 入力をスクイーズされた真空場にし, 適当なローカルオシレーター光強度で行ったバランス型ホモダイン測定の出力をスペクトラ

[35] もちろん, 単一光子レベルの信号を検出するための電気回路はそれほど単純ではない.

ムアナライザーにつなぐだけで達成される．ここでスペクトラムアナライザーとは，一種のラジオ受信機で，チューニングにより周波数を決め，その周波数成分の強度を出力する機械である．現時点では単一モードを考えているから，測定周波数に意味はない．つまり，入力した信号の強度 (振幅ではない) を出力する機械と考えてよい．もう少し厳密にいうと，バランス型ホモダイン測定を行っているときのスペクトラムアナライザーの出力は次式のようになる．

$$\langle(\hat{I}_2 - \hat{I}_1)^2\rangle = 4|\alpha|^2 \cdot {}_1\langle\psi|(\hat{x}_1 \cos\theta + \hat{p}_1 \sin\theta)^2|\psi\rangle_1 \tag{1.164}$$

入力をスクイーズされた真空場としているから，$|\psi\rangle_1 = \hat{S}(r)|0\rangle_1$ である．したがって，入力をスクイーズされた真空場としたときのスペクトラムアナライザーの出力は次式のようになる．

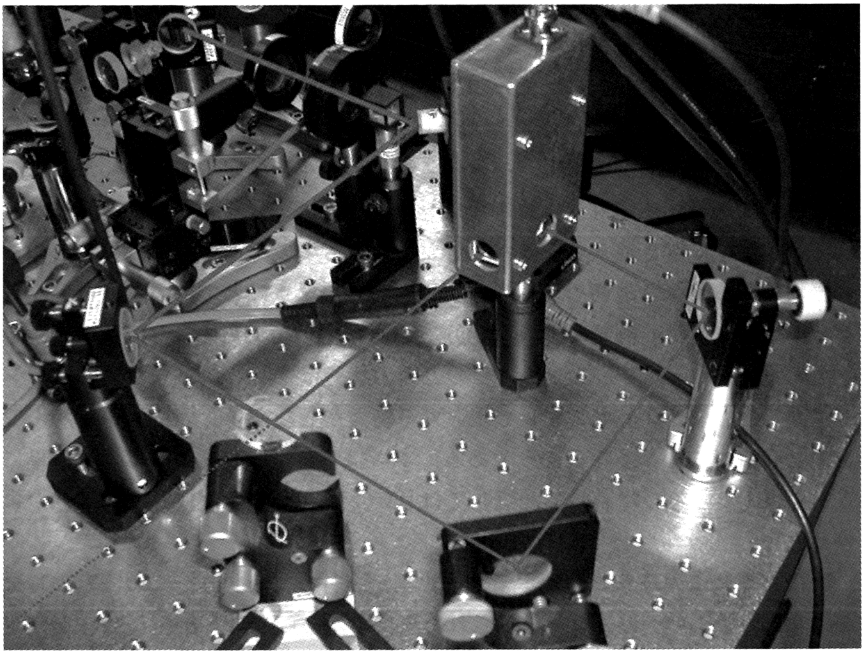


写真 1.2 バランス型ホモダイン測定の例
厳密にいうと，ビームスプリッター後の 2 つの光路長は等しくなければならないが，測定周波数が 1MHz と低周波数であるため，この程度の差は実験上問題にならない．

$$
\begin{aligned}
\langle(\hat{I}_2 - \hat{I}_1)^2\rangle &= 4|\alpha|^2 \cdot {}_1\langle 0|\hat{S}_1^\dagger(r)(\hat{x}_1\cos\theta + \hat{p}_1\sin\theta)^2\hat{S}_1(r)|0\rangle_1 \\
&= 4|\alpha|^2\Big[{}_1\langle 0|\hat{S}_1^\dagger(r)\hat{x}_1^2\hat{S}_1(r)|0\rangle_1\cos^2\theta \\
&\qquad + {}_1\langle 0|\hat{S}_1^\dagger(r)\hat{p}_1^2\hat{S}_1(r)|0\rangle_1\sin^2\theta \\
&\qquad + {}_1\langle 0|\hat{S}_1^\dagger(r)(\hat{x}_1\hat{p}_1 + \hat{p}_1\hat{x}_1)\hat{S}_1(r)|0\rangle_1\sin\theta\cos\theta\Big] \\
&= 4|\alpha|^2\Big({}_1\langle 0|\hat{x}_1^2 e^{-2r}|0\rangle_1\cos^2\theta + {}_1\langle 0|\hat{p}_1^2 e^{2r}|0\rangle_1\sin^2\theta\Big) \\
&= |\alpha|^2(e^{-2r}\cos^2\theta + e^{2r}\sin^2\theta) \qquad (1.165)
\end{aligned}
$$

ここで，式 (1.146)–(1.149) などを用いた．上式の結果から，スクイーズされた真空場をバランス型ホモダイン測定し，その出力をスペクトラムアナライザーで観測すると，ローカルオシレーター光の位相に応じて，小さい出力 (スクイー

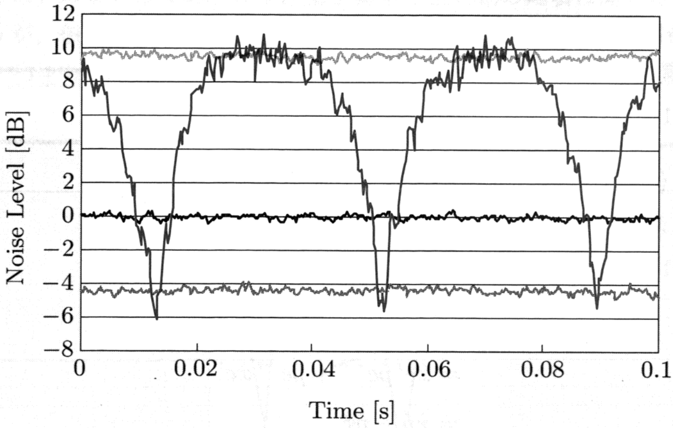


図 1.17 スクイーズされた真空場をバランス型ホモダイン測定し，スペクトラムアナライザーで観測した例．横軸はローカルオシレーター光の位相に相当し，縦軸は入力を真空場にした場合の出力レベル (0dB のライン) を基準に対数表示 (dB 単位) している．10dB と −4dB のあたりにあるラインは，それぞれアンチスクイーズとスクイーズの位相にローカルオシレーター光の位相をロックした場合である．スクイーズレベルとアンチスクイーズレベルが異なるのはロスのためであるが，この理由については後述する．測定周波数 1MHz，分解能帯域幅 30kHz，ビデオ帯域幅 300Hz．

ズされた成分) と大きい出力 (アンチスクイーズされた成分) を周期的に見ることができる．測定しているのは強度 (パワー) であるが，

$$ {}_1\langle 0|\hat{S}_1^\dagger(r)\hat{x}_1\hat{S}_1(r)|0\rangle_1 = {}_1\langle 0|\hat{S}_1^\dagger(r)\hat{p}_1\hat{S}_1(r)|0\rangle_1 = 0 $$

が示すように振幅の期待値は零であるため，これらはそれぞれ量子ゆらぎの 2 乗である分散 $\langle(\Delta x_1)^2\rangle$，$\langle(\Delta p_1)^2\rangle$ に対応している．振幅の期待値が零なのにパワーだけ存在するのは一見すると不思議な気がするが，たくさんの波が位相相関なく存在すると，振幅の期待値は零であるが波動のエネルギーは存在しているので,「波の世界」ではそれほど特殊なことではない．むしろ普通のことである．この状況をことさら強調して,「振幅はないが，ゆらぎだけ存在している」というのは素人受けはよいかもしれないが，かなり誤解を招きやすい表現である．振幅は常時零ではなく，あくまでもその期待値 (平均値) が零なのである．写真 1.2 にバランス型ホモダイン測定の例の写真を，図 1.17 にスクイーズされた真空場に対するスペクトラムアナライザー出力の例を示す．

例題 1.8

式 (1.165) を確認せよ．

【解答】 $\langle 0|\hat{S}^\dagger(r)(\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x})\hat{S}(r)|0\rangle = 0$ を示せばよい．

まず，式 (1.146) などを用いて以下の計算をする．

$$ \begin{aligned} \hat{S}^\dagger(r)(\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x})\hat{S}(r) &= \hat{S}^\dagger(r)\hat{x}\hat{S}(r)\hat{S}^\dagger(r)\hat{p}\hat{S}(r) \\ &\quad + \hat{S}^\dagger(r)\hat{p}\hat{S}(r)\hat{S}^\dagger(r)\hat{x}\hat{S}(r) \\ &= \hat{x}e^r\hat{p}e^{-r} + \hat{p}e^{-r}\hat{x}e^r \\ &= \hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x} \end{aligned} $$

次に，これを用いて $\langle 0|\hat{S}^\dagger(r)(\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x})\hat{S}(r)|0\rangle$ を計算する．

$$ \begin{aligned} &\langle 0|\hat{S}^\dagger(r)(\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x})\hat{S}(r)|0\rangle \\ &\quad = \langle 0|(\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x})|0\rangle \\ &\quad = \langle 0|\left(\frac{\hat{a}+\hat{a}^\dagger}{2}\cdot\frac{\hat{a}-\hat{a}^\dagger}{2i}+\frac{\hat{a}-\hat{a}^\dagger}{2i}\cdot\frac{\hat{a}+\hat{a}^\dagger}{2}\right)|0\rangle \\ &\quad = \langle 0|\frac{1}{2i}\left(\hat{a}^2-\hat{a}^{\dagger 2}\right)|0\rangle \\ &\quad = 0 \end{aligned} $$

■

もう1つのバランス型ホモダイン測定の例として，この測定の出力をスペクトラムアナライザーではなくオシロスコープで観測した場合を考えよう．さらに，計算を簡単にするため，ローカルオシレーター光と測定される光の相対位相に相当する θ を零 $(\theta = 0)$ とする．ただし，この仮定は決して特別なことではなく，通常の実験で行われている．オシロスコープの出力の「平均値」は，式 (1.163) において，$\theta = 0$ とした場合であるから，

$$\langle \hat{I}_2 - \hat{I}_1 \rangle = 2|\alpha| \cdot {}_1\langle \psi | \hat{x}_1 | \psi \rangle_1 \tag{1.166}$$

となる．例えば，モード1を真空場 $|0\rangle_1$ としたら，$\langle \hat{I}_2 - \hat{I}_1 \rangle = 0$ となるから，オシロスコープ出力の「平均値」は零となるはずである．しかし，実際にオシロスコープで観測すると，図1.18のようなイメージの信号を見ることになる[36]．十分長時間の平均を取ると零になるような信号 (ノイズ) である．これらはどのように考えればよいのであろうか．量子力学を習い始めた頃に聞いたことがあると思うが，値 x_1 を取る確率は，その波動関数 $(\psi(x_1) = {}_1\langle x_1 | \psi \rangle_1)$ の絶対値の2乗，つまり $|\psi(x_1)|^2$ であり，その平均値は

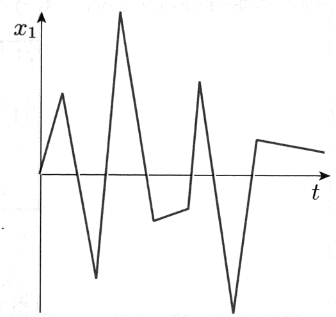


図 1.18　真空場をバランス型ホモダイン測定し，その出力をオシロスコープで観測した場合に得られるデータのイメージ．ただし，縦軸は出力，横軸は時間である．測定系の周波数帯域 (レスポンス) の逆数の時間に1回の割合で，x_1 の測定を繰り返していると考えることができる．

---

[36] ずっとシングルモードの話をしているので時間変化の話をするのは変であるが，周波数帯域の話をすると話が複雑になるため，ここでは中途半端な議論で勘弁してもらいたい．

$$\int dx_1 x_1 |\psi(x_1)|^2$$

で与えられる．この「当たり前」なことを思い出すと，この例の関係も以下に示すように「当たり前」だということがわかる．

図1.18の縦軸は，平均を取る前の x_1 の値と考えることができる．その値を取る確率はもちろん $|\psi(x_1)|^2$ であるから，真空場の場合，

$$\begin{aligned} |\psi(x_1)|^2 &= |{}_1\langle x_1|0\rangle_1|^2 \\ &= \left|\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-x_1^2}\right|^2 \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-2x_1^2} \end{aligned} \tag{1.167}$$

となる．ここで，式(1.180)を用いた[37]．つまり，値 x_1 はガウス分布することになる．この平均値

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int dx_1 x_1 e^{-2x_1^2}$$

は明らかに零であるからつじつまは合っている．もう少し一般的にいうと，式(1.166)から，平均値として得られるのは ${}_1\langle\psi|\hat{x}_1|\psi\rangle_1$ の $2|\alpha|$ 倍であるが，

$$\begin{aligned} {}_1\langle\psi|\hat{x}_1|\psi\rangle_1 &= {}_1\langle\psi|\hat{x}_1 \left(\int dx_1 |x_1\rangle_{11}\langle x_1|\right) |\psi\rangle_1 \\ &= \int dx_1 x_1 |{}_1\langle x_1|\psi\rangle_1|^2 \\ &= \int dx_1 x_1 |\psi(x_1)|^2 \end{aligned} \tag{1.168}$$

からわかるように，独立な測定結果(独立試行)に相当する時々刻々変化する x_1 の値は $|\psi(x_1)|^2$ で分布することになる[38]．さらに，この測定から $|\psi(x_1)|^2$ を求めることができるから，適当な計算により $\psi(x_1)$ を推測することができる．つまり，波動関数を推測できる．このことは，1.10節で説明するウィグナー関数を求める量子トモグラフィーとして応用されている．

---

[37] $\langle x|0\rangle$ は調和振動子の $\varphi_0(x)$ である．

[38] 前述したように，シングルモードの話の中で時間変化のことを述べるのは変であるが，ここでは時間変化を独立試行の結果のバラツキと敢えてこじつけている．

1.9 ロスと真空場

測定したい光のロスがバランス型ホモダイン測定の結果にどのように影響を与えるかを見るために，図 1.19 のようなモデルを考える．図 1.19 では，図 1.16 のセットアップに加え，ロスをモデル化したモード 1–3 間のビームスプリッターが入っている．ここで，測定したい光はモード 1 であり，モード 3 から真空場 $|0\rangle_3$ が入射する．

モード 1–3 間のビームスプリッターの出力モード 1 をローカルオシレーター光 (モード 2) の位相を $\theta = 0$ としバランス型ホモダイン測定することを考える．さらにこの出力をスペクトラムアナライザーで観測するとする．式 (1.164) からその出力 $\langle(\hat{I}_2 - \hat{I}_1)^2\rangle$ は，式 (1.160) のビームスプリッター演算子[39]を用いて，

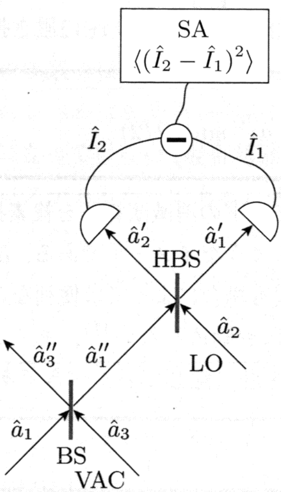


図 1.19 ビームスプリッター BS によりモード 3 (真空場) と合波されたモード 1 をバランス型ホモダイン測定し，スペクトラムアナライザー SA で観測．

---

39) ただし，ここでは

$$\hat{L}_2 = \frac{1}{2i}\left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_3 - \hat{a}_1 \hat{a}_3^\dagger\right)$$

である．

$$
\begin{aligned}
&\langle(\hat{I}_2-\hat{I}_1)^2\rangle \\
&= 4|\alpha|^2 {}_3\langle 0|\otimes {}_1\langle\psi|e^{-i\Theta\hat{L}_2}\hat{x}_1^2 e^{i\Theta\hat{L}_2}|\psi\rangle_1\otimes|0\rangle_3 \\
&= 4|\alpha|^2 {}_3\langle 0|\otimes {}_1\langle\psi|[\hat{x}_1^2\cos^2(\Theta/2)+\hat{x}_3^2\sin^2(\Theta/2)]|\psi\rangle_1\otimes|0\rangle_3 \\
&= 4|\alpha|^2\Big[{}_1\langle\psi|\hat{x}_1^2|\psi\rangle_1\cos^2(\Theta/2)+{}_3\langle 0|\hat{x}_3^2|0\rangle_3\sin^2(\Theta/2)\Big] \\
&= 4|\alpha|^2\Big[{}_1\langle\psi|\hat{x}_1^2|\psi\rangle_1\cos^2(\Theta/2)+\frac{1}{4}\sin^2(\Theta/2)\Big] \qquad (1.169)
\end{aligned}
$$

となる．ここで，${}_3\langle 0|\hat{x}_3|0\rangle_3=0$ を用いている．上式から，スペクトラムアナライザーの出力は，もともとの分散 ${}_1\langle\psi|\hat{x}_1^2|\psi\rangle_1$(量子ゆらぎの 2 乗) のうち，ビームスプリッター BS の反射率 $\sin^2(\Theta/2)$ の分だけ,「真空場ゆらぎ」の 2 乗である 1/4 に置き換わっていることがわかる[40]．こじつけの解釈を行うと，ビームスプリッターでの「ロス」に応じて真空場が侵入しているともいえる．本来は式 (1.169) 以上の意味はないのだが，量子光学の因習として，ローカルオシレーター光 (モード 2) の消滅演算子を c 数である α に置き換えたように，

量子光学の因習 2

$$\hat{a}_1''=\hat{a}_1\cos(\Theta/2)+\hat{a}_3^{(0)}\sin(\Theta/2) \qquad (1.170)$$

とすることが多い．これは各モードの消滅演算子を複素振幅と見立て，モード 3 から真空場が「侵入」してくるようなイメージである．$\hat{a}_3^{(0)}$ の (0) は真空場であることを示している．この表現も場合によっては便利なこともあるが，物理を見失いやすいので賢明な読者にはお勧めしない[41]．あくまでも現実は式 (1.169) 以上のことはない．このことを肝に銘じておくべきである．

例題 1.9

式 (1.169) を確認せよ．

【解答】 式 (1.100) を用いて以下の計算を行う．

$$
\begin{aligned}
e^{-i\Theta\hat{L}_2}\hat{x}_1^2 e^{i\Theta\hat{L}_2} &= e^{-i\Theta\hat{L}_2}\hat{x}_1 e^{i\Theta\hat{L}_2}e^{-i\Theta\hat{L}_2}\hat{x}_1 e^{i\Theta\hat{L}_2} \\
&= \left(e^{-i\Theta\hat{L}_2}\frac{\hat{a}_1+\hat{a}_1^\dagger}{2}e^{i\Theta\hat{L}_2}\right)^2
\end{aligned}
$$

40) 同様の計算で p 成分に関しても同じことがいえる．

41) とはいいつつも，便利なのでこの後何回か使う．

$$
\begin{aligned}
&= \left[\frac{\hat{a}_1 \cos(\Theta/2) + \hat{a}_3 \sin(\Theta/2)}{2} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\hat{a}_1^\dagger \cos(\Theta/2) + \hat{a}_3^\dagger \sin(\Theta/2)}{2} \right]^2 \\
&= [\hat{x}_1 \cos(\Theta/2) + \hat{x}_3 \sin(\Theta/2)]^2 \\
&= \hat{x}_1^2 \cos^2(\Theta/2) + \hat{x}_3^2 \sin^2(\Theta/2) \\
&\quad + 2\hat{x}_1\hat{x}_3 \cos(\Theta/2)\sin(\Theta/2)
\end{aligned}
$$

さらに

$$
{}_3\langle 0| \otimes {}_1\langle\psi|\hat{x}_1\hat{x}_3|\psi\rangle_1 \otimes |0\rangle_3 = 0
$$

であるから，式 (1.169) は明らか．■

ここまで説明してきたことを示すよい例は，図 1.17 であろう．図の説明文で触れたように，現実の実験ではスクイーズされた真空場のアンチスクイーズのレベルとスクイーズのレベルは真空場レベルに関して対称にはならない．つまり，最小不確定状態になっていない (混合状態になっている)．これは現実の実験では必ずどこかにロスがあるからである．通常ロスの原因は 1 つではないが，これらは合わせて 1 つのビームスプリッターからの「真空場侵入」として計算できる．例えば，スクイーズのレベルが本来 -10dB ($e^{-2r} = 0.1$) のとき，30%のロスがあったとしよう．このとき，式 (1.169) においてロスのビームスプリッター反射率 $\sin^2(\Theta/2) = 0.3$，したがって透過率 $\cos^2(\Theta/2) = 0.7$ とし，式 (1.165) を用いれば，アンチスクイーズとスクイーズのレベルはそれぞれ 8.6dB と -4.3dB となる．ある程度，図 1.17 の実験結果と合うことから，もともとスクイーズは -10dB 程度出ており，測定全体としてのロスが 30%程度あることがわかる．

1.10 ウィグナー関数

ここまで量子状態を図示するとき，平均値と分散に基づいた位相空間 (平面) でのイメージ図のみを示してきた．ここではもう少しマシな表現法としてウィグナー関数を紹介する．ウィグナー関数は実験で求めることができるので，実験家には非常に重要なツールとなっている．

ウィグナー関数 $W(x,p)$ は以下のように定義される．

$$W(x,p) \equiv \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp\left(-\frac{i}{\hbar}p\xi\right)\left\langle x+\frac{1}{2}\xi\middle|\hat{\rho}\middle|x-\frac{1}{2}\xi\right\rangle \tag{1.171}$$

もちろん，$\hat{\rho}$ は表現したい量子状態の密度演算子である．ウィグナー関数は準確率密度関数と呼ばれ，量子が運動量 p を持ち，位置 x に存在する確率分布と考えてよい．そのわけは直感的には以下のように説明される．式 (1.171) の $\left\langle x+\frac{1}{2}\xi\middle|\hat{\rho}\middle|x-\frac{1}{2}\xi\right\rangle$ の部分は，位置 $\left(x-\frac{1}{2}\xi\right)$ から位置 $\left(x+\frac{1}{2}\xi\right)$ への状態の遷位 (この間の移動) の確率を表している．位置 $\left(x-\frac{1}{2}\xi\right)$ から位置 $\left(x+\frac{1}{2}\xi\right)$ への状態の遷位は，位置 x ($x-\frac{1}{2}\xi$ と $x+\frac{1}{2}\xi$ の中点) に存在し，ξ の長さだけ動きつつあると言い換えてもよい．ご存じのように，$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp\left(-\frac{i}{\hbar}p\xi\right)$ は符号 (方向) を含めた長さ (位置) から運動量へのフーリエ変換を表すから，運動量 p を持つことになり，ウィグナー関数全体として位置 x に存在し，運動量 p を持つ確率になっていることがわかる．

ここまでの説明だと，ただの確率分布のような印象を与え，量子力学的状態を表しているような気がしない．しかし，ちゃんと量子力学的状態を表している．その最たる部分は，古典的状態のウィグナー関数には負になる部分は存在しないが，量子力学的状態には負になる部分の存在を許すことである．古典的状態つまり古典力学において位置 x，運動量 p をとる確率が負になることはないから，古典的状態のウィグナー関数に負になる部分が存在しないのは納得がいく．しかし，量子力学的状態ではウィグナー関数に負の部分の存在が許されるのである．確率が負になるとはどういうことかよくわからないが，取りあえ

ずウィグナー関数が「準」確率密度関数と呼ばれる所以である.

ウィグナー関数には次式のような性質がある.

$$\iint dxdpW(x,p) = 1 \tag{1.172}$$

これは確率の和が 1 になるようなものである. また, 状態 $|\psi_1\rangle$ と状態 $|\psi_2\rangle$ のウィグナー関数をそれぞれ $W_1(x,p)$ と $W_2(x,p)$ すれば, 次式のような性質がある.

$$|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2 = 2\pi\hbar \iint dxdpW_1(x,p)W_2(x,p) \tag{1.173}$$

これは 2 つのウィグナー関数の重なりが, 状態の「近さ」の尺度になっていることを示している. つまり, ウィグナー関数のかたちが似ていれば, 似た状態であるといえる. ただし, 少し注意しておくと, 式 (1.173) が正しいのは, 2 つの状態が純粋状態のときだけで, どちらか片方あるいは両方が密度演算子でしか表せない状態, つまり混合状態のときは成立しない. したがって, このような場合は, 2 つのウィグナー関数の積の積分で状態の近さは判断できない.

次にウィグナー関数の例を示そう. 最初の例として真空場 $|0\rangle$ のウィグナー関数を示す. 式 (1.171) の定義に, 真空場の密度演算子 $|0\rangle\langle 0|$ を代入し, 我々のルールである $\hbar = 1/2$ を用いると, 真空場 $|0\rangle$ のウィグナー関数 $W_0(x,p)$ は次式のようになる.

$$W_0(x,p) = \frac{1}{\pi}\int d\xi e^{-2ip\xi}\langle x+\xi/2|0\rangle\langle 0|x-\xi/2\rangle \tag{1.174}$$

したがって, この具体的な表式を求めるためには, $\psi_0(x) = \langle x|0\rangle$ の表式がわかればよい. 実はこれは「1.2　調和振動子」の節で求めた $\varphi_0(x)$ (式 (1.28)) にほかならないのであるが, ここでは真面目に求めることにする. $\hat{a}|0\rangle = 0$ から,

$$\langle x|\hat{a}|0\rangle = 0 \tag{1.175}$$

ここで, $\hat{a} = \hat{x} + i\hat{p}$ を用いると,

$$\langle x|\hat{x}|0\rangle + i\langle x|\hat{p}|0\rangle = 0 \tag{1.176}$$

となる. $\hbar = 1/2$ とした場合の調和振動子と同じ交換関係 $[\hat{x},\hat{p}] = i/2$ が成り

立っているから，調和振動子と同様，式 (1.26) が成立する．つまり，

$$\langle x|\hat{p}|\psi\rangle = -i\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\psi(x) \tag{1.177}$$

が成立する．これを用いて式 (1.176) を書き直すと，

$$x\psi_0(x) + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\psi_0(x) = 0 \tag{1.178}$$

となる．この微分方程式を解くとその解は，

$$\psi_0(x) = ce^{-x^2} \tag{1.179}$$

規格化条件

$$\int dx|\psi_0(x)|^2 = 1 \quad \text{および} \quad \int dxe^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

を用いると，

$$\psi_0(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} \tag{1.180}$$

となる．この結果を用いて，式 (1.174) である $W_0(x,p)$ の具体的な表式を計算する．

$$\begin{aligned} W_0(x,p) &= \frac{1}{\pi}\int d\xi e^{-2ip\xi}\langle x+\xi/2|0\rangle\langle 0|x-\xi/2\rangle \\ &= \frac{1}{\pi}\int d\xi e^{-2ip\xi}\psi_0(x+\xi/2)\psi_0(x-\xi/2) \\ &= \frac{1}{\pi}\int d\xi e^{-2ip\xi}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-(x+\xi/2)^2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-(x-\xi/2)^2} \\ &= \frac{2}{\pi}e^{-2(x^2+p^2)} \end{aligned} \tag{1.181}$$

このように真空場 $|0\rangle$ のウィグナー関数 $W_0(x,p)$ は複素ガウス分布になる．図 1.20 に $W_0(x,p)$ を示す．

2つ目の例として，コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ $(\alpha = x_0 + ip_0)$ のウィグナー関数 $W_\alpha(x,p)$ を示そう．コヒーレント状態の密度演算子は $|\alpha\rangle\langle\alpha|$ であるから，$W_\alpha(x,p)$ を計算するには，$\psi_\alpha(x) = \langle x|\alpha\rangle$ の表式がわかればよい．したがって，これを計算する[42]．

---

[42] 式 (1.132) から，$\hat{D}(\alpha) = e^{-ix_0p_0}e^{i2p_0\hat{x}}e^{-i2x_0\hat{p}}$ となることを用いる．

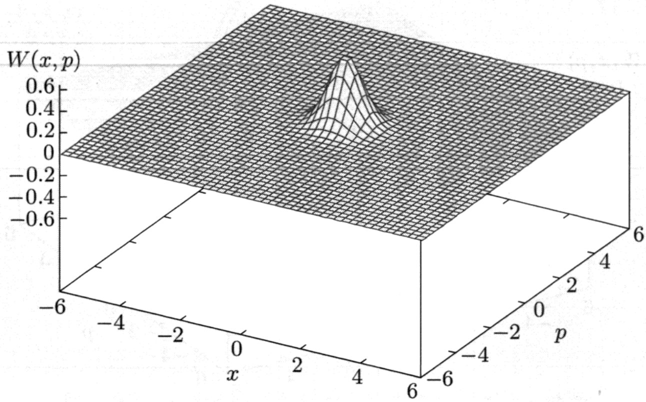


図 1.20　真空場のウィグナー関数

$$\begin{aligned}
\psi_\alpha(x) &= \langle x|\alpha\rangle \\
&= \langle x|\hat{D}(\alpha)|0\rangle \\
&= \langle x|e^{-ix_0p_0}e^{i2p_0\hat{x}}e^{-i2x_0\hat{p}}|0\rangle \\
&= e^{-ix_0p_0}e^{i2p_0x}\langle x|e^{-i2x_0\hat{p}}|0\rangle \\
&= e^{-ix_0p_0}e^{i2p_0x}\psi_0(x-x_0) \\
&= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-ix_0p_0+i2p_0x-(x-x_0)^2} \qquad (1.182)
\end{aligned}$$

この結果を用いて，真空場の場合と同様に計算すると，

$$W_\alpha(x,p) = \frac{2}{\pi}e^{-2(x-x_0)^2-2(p-p_0)^2} \qquad (1.183)$$

となり，コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ $(\alpha = x_0 + ip_0)$ のウィグナー関数は，真空場のウィグナー関数 $W_0(x,p)$ を (x_0,p_0) だけシフトしたものとなっていることがわかる．図 1.21 にコヒーレント状態のウィグナー関数の例を示す．

コヒーレント状態のウィグナー関数を示したついでに，スクイーズド状態のウィグナー関数を示そう．式 (1.140) や (1.144) のように，スクイーズ過程による変換は $(x,p) \to (x',p') = (xe^{-r}, pe^{r})$ のような「座標変換」である．したがって，これを逆に解いて $(x,p) = (x'e^{r}, p'e^{-r})$ とし，もとのウィグナー関

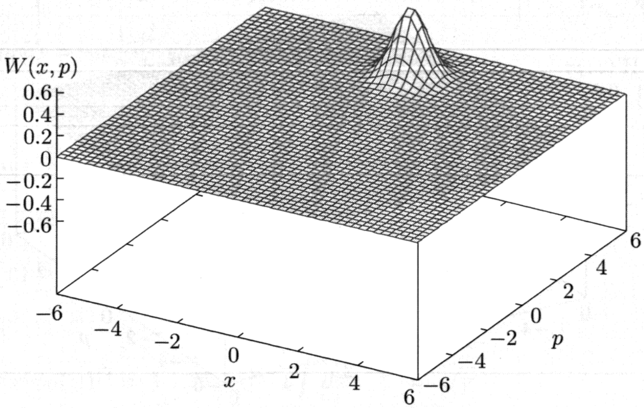


図 1.21 コヒーレント状態のウィグナー関数の例
ただし，$(x_0, p_0) = (0, 4)$ である．

数に代入すれば,「座標変換」後のウィグナー関数を求めることができる．例えば，スクイーズされた真空場のウィグナー関数 $W_{\mathrm{sv}}^{(r)}(x', p')$ は，真空場のウィグナー関数である式 (1.181) に上の関係を代入すれば求めることができる．

$$W_{\mathrm{sv}}^{(r)}(x', p') = W_0(x'e^{r}, p'e^{-r}) \\ = \frac{2}{\pi} e^{-2(x'e^{r})^2 - 2(p'e^{-r})^2} \tag{1.184}$$

図 1.22 に $r = 0.69$ のときのスクイーズされた真空場を示す (ただし，(x', p') を改めて (x, p) としている)．

ここまでの例では，ウィグナー関数が負の値を取ることはなかった．しかし，次のシュレディンガーの猫状態では負になる場合もある．

ご存じのようにシュレディンガーの猫状態とは，生きている猫の状態と死んだ猫の状態の重ね合わせの状態である．もちろん，重ね合わせの状態は量子力学特有の状態であるから，言葉では説明しようがない．それを可視化するのがウィグナー関数での表記の目的でもある (実験でも求めることができる)．

量子光学では，生きている状態をコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$，死んでいる状態をもう 1 つのコヒーレント状態 $-|-\alpha\rangle$ とすることが多い．ここでもそれを踏襲

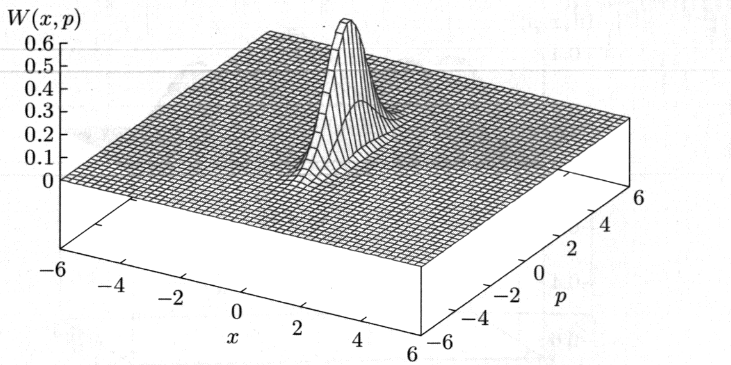


図 1.22　スクイーズされた真空場のウィグナー関数

しよう．そうすると 2 つの重ね合わせの状態は

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle)$$

となる[43)]から，その密度演算子は，

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{\text{cat}} &= \frac{1}{2}\Big(|\alpha\rangle\langle\alpha| + |-\alpha\rangle\langle-\alpha|\Big) \\ &\quad - \frac{1}{2}\Big(|\alpha\rangle\langle-\alpha| + |-\alpha\rangle\langle\alpha|\Big)\end{aligned} \tag{1.185}$$

となる．この密度演算子を用いて，シュレーディンガーの猫状態のウィグナー関数を計算し[44)]，図示したものが図 1.23 である．ただし，ここでは $|\alpha\rangle = |1.5\rangle$, $-|-\alpha\rangle = -|-1.5\rangle$ としている．図 1.23 から明らかに，原点 $(0,0)$ 付近でウィグナー関数は負の値を取っている．シュレディンガーの猫状態が純粋に量子力学的状態である証である．

このことを明らかにするために，生きた猫と死んだ猫の古典的な混合状態について考える．この古典的な混合状態の密度演算子 $\hat{\rho}_{\text{mix}}$ は次のように書ける．

---

43) $|\alpha\rangle$ と $-|-\alpha\rangle$ は直交しないから，正確には規格化因子は $1/\sqrt{2}$ とはならない．しかし，その差は一般に小さいのでここでは無視する．

44) コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ のウィグナー関数を計算したのと同様な方法で計算することができる．

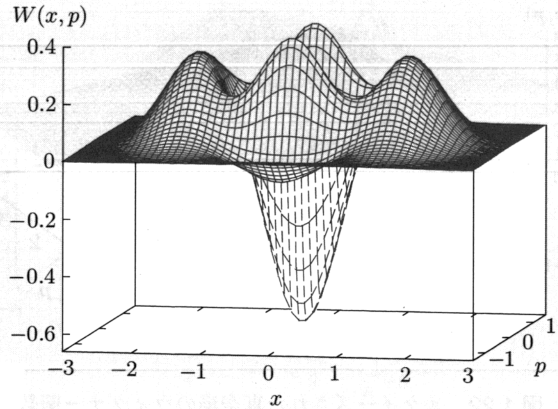


図 1.23　シュレディンガーの猫状態のウィグナー関数
生きている状態は $(1.5, 0)$ 付近のピーク，死んでいる状態は $(-1.5, 0)$ 付近のピークである．

$$\hat{\rho}_{\mathrm{mix}} = \frac{1}{2}\Big(|\alpha\rangle\langle\alpha| + |-\alpha\rangle\langle-\alpha|\Big) \tag{1.186}$$

この密度演算子を用いて計算したウィグナー関数を図 1.24 に示す．式 (1.185) と式 (1.186) を比べてわかるように，量子力学的重ね合わせの状態には密度演算子の非対角成分があるのに対し，古典的混合状態には非対角成分が存在しない．このため図 1.23 と図 1.24 を比べると，図 1.23 では生きている猫と死んだ猫のピークである $(\pm1.5, 0)$ 以外に，負の数を含めたいくつかの凹凸が存在しているのに対し，図 1.24 では生きている猫と死んだ猫以外のピークは存在しなくなっている．図 1.23 中の $(\pm1.5, 0)$ 以外の凹凸は量子コヒーレンスとでも呼ぶべきものであり，密度演算子の非対角成分から生じている．別の言い方をすると，観測前の「純粋状態」にはこのように量子コヒーレンス (密度演算子の非対角成分) は存在するが，観測すると「混合状態」になり，量子コヒーレンスは消失してしまう．波束が「収縮」してしまうのである．

もう 1 つの純粋な量子力学的状態の例は，単一光子状態 $|1\rangle$ である．意識していなかったかもしれないが，光子が 1 つだけ存在しているということは，純

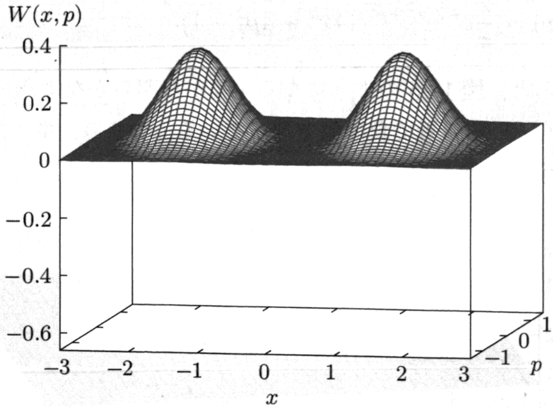


図 1.24　生きている猫と死んでいる猫の古典的混合状態

粋に量子力学的状態なのである[45]．したがって，古典力学の言葉では光子について語ることはできない．その様子を見ていこう．単一光子状態の密度演算子は $|1\rangle\langle 1|$ であるから，ウィグナー関数の表式を求めるためには，$\psi_1(x) = \langle x|1\rangle$ の表式を求めればよいことになる[46]．これは以下のように計算できる．

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= \langle x|1\rangle \\ &= \langle x|\hat{a}^\dagger|0\rangle \\ &= \langle x|(\hat{x} - i\hat{p})|0\rangle \\ &= x\psi_0(x) - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\psi_0(x) \\ &= 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} xe^{-x^2} \end{aligned} \tag{1.187}$$

この結果を用いると，単一光子状態 $|1\rangle$ のウィグナー関数 $W_1(x, p)$ は，次式のようになる．

---

[45] 単一光子状態 $|1\rangle$ はエネルギー固有状態である．平たくいうとエネルギーが確定し，位相が全くの不確定な状態である．イメージは図 1.3 である．

[46] $\psi_1(x)$ は，調和振動子の $\varphi_1(x)$ と同じである．

$$W_1(x,p) = \frac{2}{\pi} e^{-2(x^2+p^2)}(4x^2+4p^2-1) \tag{1.188}$$

これを図示すると，図 1.25 のようになる．図から明らかなように，このウィグナー関数は原点 (0,0) 付近で負の値を取っている．つまり，単一光子状態 $|1\rangle$ も純粋に量子力学的状態なのである (古典的な粒子ではない).

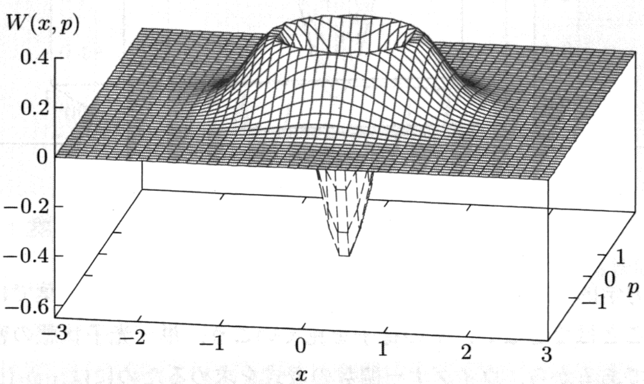


図 1.25 単一光子状態 $|n=1\rangle$ のウィグナー関数

例題 1.10

式 (1.188) を確認せよ．

【解答】

$$\begin{aligned}
W_1(x,p) &= \frac{1}{\pi}\int d\xi e^{-2ip\xi}\langle x+\xi/2|1\rangle\langle 1|x-\xi/2\rangle \\
&= \frac{1}{\pi}\int d\xi e^{-2ip\xi}\psi_1(x+\xi/2)\psi_1(x-\xi/2) \\
&= \frac{1}{\pi}\int d\xi e^{-2ip\xi} 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}(x+\xi/2)e^{-(x+\xi/2)^2} \\
&\qquad \times 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}(x-\xi/2)e^{-(x-\xi/2)^2} \\
&= \frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int d\xi \left(x^2-\frac{\xi^2}{4}\right)e^{-\frac{1}{2}(\xi+2ip)^2-2x^2-2p^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{4}{\pi}x^2 e^{-2x^2-2p^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int d\xi e^{-\frac{1}{2}(\xi+2ip)^2} \\
&\quad -\frac{4}{\pi}e^{-2x^2-2p^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int d\xi \frac{\xi^2}{4} e^{-\frac{1}{2}(\xi+2ip)^2} \\
&= \frac{2}{\pi}e^{-2(x^2+p^2)}\cdot 4x^2 \\
&\quad -\frac{4}{\pi}e^{-2x^2-2p^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int d\eta \frac{(\eta-2ip)^2}{4} e^{-\frac{1}{2}\eta^2} \\
&= \frac{2}{\pi}e^{-2(x^2+p^2)}(4x^2+4p^2-1)
\end{aligned}
$$

■

1.11　量子エンタングルメントと量子光学

1.11.1　2者間の量子エンタングルメント

この本では量子光学と量子情報科学の接点について解説することを目指している．量子情報科学の本質は何かというと，量子エンタングルメントとその制御である．そろそろ道具も揃ってきたことなので，その解説を始める．

まず，量子エンタングルメントとは何かということである．2つの物理系A，Bが量子エンタングルした状態にあるということは，その密度演算子 $\hat{\rho}_{\mathrm{AB}}$ が以下のような場合である．

$$\hat{\rho}_{\mathrm{AB}} \neq \sum_i \eta_i \hat{\rho}_{i,\mathrm{A}} \otimes \hat{\rho}_{i,\mathrm{B}} \tag{1.189}$$

ここで，$\hat{\rho}_{i,\mathrm{A}}$，$\hat{\rho}_{i,\mathrm{B}}$ はそれぞれ部分系A，Bの密度演算子であり，η_i は状態 $\hat{\rho}_{i,\mathrm{A}} \otimes \hat{\rho}_{i,\mathrm{B}}$ を取る確率である．つまり，量子エンタングルした状態とは，全体の状態が部分系の密度演算子の直積では書けない状態ということである．また，書ける場合をセパラブルな(分離可能な)状態と呼ぶ．

量子エンタングルメントは，有名なEPR(アインシュタイン・ポドルスキー・ローゼン)のパラドックス[47]に端を発する．この議論のエッセンスは，位置演算子 $\hat{x}$ と運動量演算子 $\hat{p}$ は，交換関係 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ を満たすから非可換であるのに対し，2つの量子系A，Bを考え，それぞれの位置演算子を $\hat{x}_{\mathrm{A}}$，$\hat{x}_{\mathrm{B}}$ とし，運動量演算子を $\hat{p}_{\mathrm{A}}$，$\hat{p}_{\mathrm{B}}$ とすれば，$[\hat{x}_{\mathrm{A}} - \hat{x}_{\mathrm{B}}, \hat{p}_{\mathrm{A}} + \hat{p}_{\mathrm{B}}] = 0$ となり，可換となることである．つまり，平たくいえば，量子系AあるいはBにおいて，位置と運動量を同時には確定できない(位置演算子と運動量演算子の同時固有状態は存在しない)が，相対位置と運動量の和は同時に確定できる($\hat{x}_{\mathrm{A}} - \hat{x}_{\mathrm{B}}$ と $\hat{p}_{\mathrm{A}} + \hat{p}_{\mathrm{B}}$ の同時固有状態が存在する)ということになる．このことを解釈すれば，アインシュタインならずとも非常に不思議に思うのであるが(だからパラドックスだったのだが)，式の上では何の矛盾もないので，この本では特に解釈はしないことにする．いずれにしても，この $\hat{x}_{\mathrm{A}} - \hat{x}_{\mathrm{B}}$ と $\hat{p}_{\mathrm{A}} + \hat{p}_{\mathrm{B}}$ の同時固有状態のことをEPR状態と呼ぶ．EPR状態は最も基本的な量子エンタングルした状態である．

---

[47] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).

EPR 状態の量子エンタングルメントについて，そのウィグナー関数の表式から考えてみよう．先ほど量子エンタングルメントを密度演算子を用いて定義したが，その定義は「量子エンタングルした状態とは部分系のウィグナー関数の積で書けない」と言い直してもよい．したがって，EPR 状態のウィグナー関数において，このようになっていることを確認する．

上述したように，EPR 状態とは $\hat{x}_{\mathrm{A}} - \hat{x}_{\mathrm{B}}$ と $\hat{p}_{\mathrm{A}} + \hat{p}_{\mathrm{B}}$ の同時固有状態のことであるが，その固有値を両方とも零としても一般性を失わない．したがって，この本では特に断らない限り EPR 状態の定義を狭めて，$\hat{x}_{\mathrm{A}} - \hat{x}_{\mathrm{B}}$ と $\hat{p}_{\mathrm{A}} + \hat{p}_{\mathrm{B}}$ の同時固有状態のうち，$x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{B}} = 0$，$p_{\mathrm{A}} + p_{\mathrm{B}} = 0$ の固有値を持つものとする．そうすると，EPR 状態のウィグナー関数は次式のようになる．

$$W_{\mathrm{EPR}}(x_{\mathrm{A}}, p_{\mathrm{A}}; x_{\mathrm{B}}, p_{\mathrm{B}}) = c\,\delta(x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{B}})\,\delta(p_{\mathrm{A}} + p_{\mathrm{B}}) \tag{1.190}$$

ただし，c は適当な定数である．右辺は明らかに，$W(x_{\mathrm{A}}, p_{\mathrm{A}}) \times W(x_{\mathrm{B}}, p_{\mathrm{B}})$ のように A，B それぞれのウィグナー関数の積のかたちに分離できないから，量子エンタングルした状態である．

純粋状態として EPR 状態が量子エンタングルしていることを確認してみよう．純粋状態の場合，量子エンタングルした状態とは部分系の状態ベクトルの直積で書けないということであるが，EPR 状態の状態ベクトル $|\mathrm{EPR}\rangle_{\mathrm{AB}}$[48]は，

$$\begin{aligned} |\mathrm{EPR}\rangle_{\mathrm{AB}} &= c\int dx |x\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |x\rangle_{\mathrm{B}} \\ &= c\int dp |p\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |-p\rangle_{\mathrm{B}} \end{aligned} \tag{1.191}$$

であるから，明らかに部分系の状態ベクトルの直積では書けない[49]．したがって，このような見地からも EPR 状態は量子エンタングルしている．

---

48) この状態は規格化不可能という意味で“unphysical”である．

49) 式 (1.191) の 2 つ目の等号は

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}xp} \tag{1.192}$$

などから直接確かめることができる．

例題 1.11

デルタ関数の公式 $\delta(p_{\mathrm{A}}-p_{\mathrm{B}})=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int dx e^{\pm i(p_{\mathrm{A}}-p_{\mathrm{B}})x}$ や $\hat{I}=\displaystyle\int dp|p\rangle\langle p|$ を用いて，式 (1.191) を確認せよ．

【解答】

$$
\begin{aligned}
&\int dx|x\rangle_{\mathrm{A}}\otimes|x\rangle_{\mathrm{B}}\\
&=\int dx\int dp_{\mathrm{A}}|p_{\mathrm{A}}\rangle_{\mathrm{A}\,\mathrm{A}}\langle p_{\mathrm{A}}|x\rangle_{\mathrm{A}}\otimes\int dp_{\mathrm{B}}|p_{\mathrm{B}}\rangle_{\mathrm{B}\,\mathrm{B}}\langle p_{\mathrm{B}}|x\rangle_{\mathrm{B}}\\
&=\int dx\int dp_{\mathrm{A}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-\frac{i}{\hbar}xp_{\mathrm{A}}}|p_{\mathrm{A}}\rangle_{\mathrm{A}}\otimes\int dp_{\mathrm{B}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-\frac{i}{\hbar}xp_{\mathrm{B}}}|p_{\mathrm{B}}\rangle_{\mathrm{B}}\\
&=\int\int dp_{\mathrm{A}}dp_{\mathrm{B}}\frac{1}{2\pi\hbar}\int dx e^{-\frac{i}{\hbar}x(p_{\mathrm{A}}+p_{\mathrm{B}})}|p_{\mathrm{A}}\rangle_{\mathrm{A}}\otimes|p_{\mathrm{B}}\rangle_{\mathrm{B}}\\
&=\int\int dp_{\mathrm{A}}dp_{\mathrm{B}}\delta(p_{\mathrm{A}}+p_{\mathrm{B}})|p_{\mathrm{A}}\rangle_{\mathrm{A}}\otimes|p_{\mathrm{B}}\rangle_{\mathrm{B}}\\
&=\int dp_{\mathrm{A}}|p_{\mathrm{A}}\rangle_{\mathrm{A}}\otimes|-p_{\mathrm{A}}\rangle_{\mathrm{B}}\\
&=\int dp|p\rangle_{\mathrm{A}}\otimes|-p\rangle_{\mathrm{B}}
\end{aligned}
$$

■

EPR 状態を量子光学的に生成することを考える前に，もっと単純な例を考えよう．それは図 1.26 のように単一光子状態 $|1\rangle$ とハーフビームスプリッターを用いた場合である (もちろん，光子が入射していないビームスプリッターの入力ポートには「真空」$|0\rangle$ が入射している)．図 1.26 のようにビームスプリッター

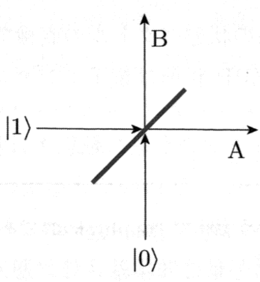


図 1.26 単一光子状態がハーフビームスプリッターに入射

の2つの出力モードをそれぞれA，Bとすると，この2つのモードの状態ベクトル $|\mathrm{EPR2}\rangle_{\mathrm{AB}}$ は，式 (1.160) のようなビームスプリッター演算子を用いて計算すると次式のようになる．

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{EPR2}\rangle_{\mathrm{AB}} &= \exp\left[-\frac{\pi}{4}(\hat{a}_{\mathrm{A}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathrm{B}} - \hat{a}_{\mathrm{A}}\hat{a}_{\mathrm{B}}^{\dagger})\right]|1\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |1\rangle_{\mathrm{B}} + |1\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}}\right) \qquad (1.193)
\end{aligned}
$$

この状態ベクトルは部分系の状態ベクトルの直積では書けないので，量子エンタングルしている．

量子エンタングルメントは純粋に量子力学的性質であり，古典的な方法のみでは生成されない．この例を一見すると，量子力学的方法が入っていないようである．古典粒子的なイメージで光子を捉えて，どちらかのポートに光子が1つ出力され，他のポートには出力されない (「真空」が出力される) というのは不思議なことではないから，この例では量子力学的な「装置」がないと思うかもしれない (もちろん，ビームスプリッターで重ね合わせの状態を作るわけだから，ビームスプリッターがその「装置」ではあるのだが)．ところが，次に述べるようにその仕掛けは入力状態である単一光子状態 $|1\rangle$ にある．つまり，単一光子状態 $|1\rangle$ が図 1.25 に示したウィグナー関数のように純粋な量子力学的状態であることが重要なのである[50]．

当然のことながら，実際に $|\mathrm{EPR2}\rangle_{\mathrm{AB}}$ を生成するには単一光子発生器が必要となる．ここで，単一光子発生器とは，オンディマンドな単一光子生成装置のことである．つまり，装置のボタンを押したとき，単一光子を100%の確率で所望するモードに生成する機械だといえる．しかし，残念ながら，このような単一光子発生器は存在しない．したがって，レーザー光のようなコヒーレント状態にある光を減光していって，平均光子数が1である光で代用することを考えるかもしれない．そこで，図 1.27 のように単一光子状態 $|1\rangle$ の代わりにコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ をハーフビームスプリッターの入力とした場合を考えよう．この場合のビームスプリッター出力の状態 $|\phi\rangle_{\mathrm{AB}}$ は，式 (1.193) と同様に計算できる．

---

[50] $|0\rangle$ も $|1\rangle$ もエネルギー固有状態であるから，トータルの入力エネルギーが確定しており，出力もトータルのエネルギーが確定した状態 (純粋に量子力学的状態) となる．

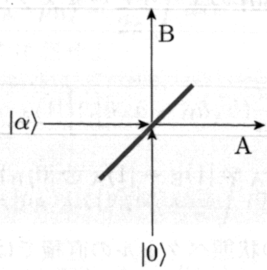


図 1.27 コヒーレント状態がハーフビームスプリッターに入射

$$|\phi\rangle_{\mathrm{AB}} = \exp\left[-\frac{\pi}{4}(\hat{a}_{\mathrm{A}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathrm{B}} - \hat{a}_{\mathrm{A}}\hat{a}_{\mathrm{B}}^{\dagger})\right]|\alpha\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}}$$
$$= \left|\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_{\mathrm{A}} \otimes \left|\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_{\mathrm{B}} \tag{1.194}$$

となり，モード A，B 間で全くエンタングルしていない．それぞれの出力モードで振幅が $1/\sqrt{2}$，つまり平均光子数が 1/2 になっただけである．この関係は α の大きさには関係ないから，平均光子数が 1 になってもエンタングルすることはない．この様子は単一光子状態 $|1\rangle$ のウィグナー関数が図 1.25 のように「純量子的」であるのに対し，コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ のウィグナー関数が図 1.21 のように「半古典的」であることから大体の察しはつく．実際，それぞれを同じ「重ね合わせ状態製造マシン」であるハーフビームスプリッターに入れた結果がこのようになるのだから，量子エンタングルメントを得るには，入力に「非古典性」が必要であるといってもよい[51]．ということで，現実に $|\mathrm{EPR2}\rangle_{\mathrm{AB}}$ を生成することは非常に困難である (見かけはシンプルなのだが $\cdots$)．

例題 1.12

式 (1.193)–(1.195) を確認せよ．

【解答】 式 (1.193) を確かめる．

[51] コヒーレント状態では，全ての物理量がそこそこに不確定 (半古典的) であるのに対し，光子数状態はエネルギー固有状態 (エネルギーが確定した状態) であり，純粋に量子力学的状態である．

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{EPR2}\rangle_{\mathrm{AB}} &= \exp\left[-\frac{\pi}{4}(\hat{a}_{\mathrm{A}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathrm{B}} - \hat{a}_{\mathrm{A}}\hat{a}_{\mathrm{B}}^{\dagger})\right]|1\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}} \\
&= \Big[1 - \frac{\pi}{4}(\hat{a}_{\mathrm{A}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathrm{B}} - \hat{a}_{\mathrm{A}}\hat{a}_{\mathrm{B}}^{\dagger}) \\
&\qquad + \frac{1}{2!}\left(-\frac{\pi}{4}\right)^2(\hat{a}_{\mathrm{A}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathrm{B}} - \hat{a}_{\mathrm{A}}\hat{a}_{\mathrm{B}}^{\dagger})^2 + \cdots\Big]|1\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}} \\
&= |1\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}} + \frac{\pi}{4}|0\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |1\rangle_{\mathrm{B}} - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2|1\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}} + \cdots \\
&= \cos\frac{\pi}{4}\cdot|1\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}} + \sin\frac{\pi}{4}\cdot|0\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |1\rangle_{\mathrm{B}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |1\rangle_{\mathrm{B}} + |1\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}}\right)
\end{aligned}
$$

式 (1.194) を確かめる前に，$\hat{B}_{\mathrm{HBS}} = \exp\left[-\frac{\pi}{4}(\hat{a}_{\mathrm{A}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathrm{B}} - \hat{a}_{\mathrm{A}}\hat{a}_{\mathrm{B}}^{\dagger})\right]$ として，下記を計算する．

$$
\begin{aligned}
&\hat{B}_{\mathrm{HBS}}|n\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}} \\
&= \hat{B}_{\mathrm{HBS}}\frac{1}{\sqrt{n!}}\hat{a}_{\mathrm{A}}^{\dagger n}|0\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n!}}\hat{B}_{\mathrm{HBS}}\hat{a}_{\mathrm{A}}^{\dagger n}\hat{B}_{\mathrm{HBS}}^{\dagger}|0\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n!}}\hat{B}_{\mathrm{HBS}}\hat{a}_{\mathrm{A}}^{\dagger}\hat{B}_{\mathrm{HBS}}^{\dagger}\cdots\hat{B}_{\mathrm{HBS}}\hat{a}_{\mathrm{A}}^{\dagger}\hat{B}_{\mathrm{HBS}}^{\dagger}|0\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\hat{B}_{\mathrm{HBS}}\hat{a}_{\mathrm{A}}^{\dagger}\hat{B}_{\mathrm{HBS}}^{\dagger}\right)^n|0\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\hat{a}_{\mathrm{A}}^{\dagger}\cos\frac{\pi}{4} + \hat{a}_{\mathrm{B}}^{\dagger}\sin\frac{\pi}{4}\right)^n|0\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n!}}\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-k}\hat{a}_{\mathrm{A}}^{\dagger k}\hat{a}_{\mathrm{B}}^{\dagger n-k}|0\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sqrt{\frac{n!}{k!(n-k)!}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n|k\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |n-k\rangle_{\mathrm{B}}
\end{aligned}
$$

これを用いて，式 (1.194) を確かめる．

$$
\begin{aligned}
&\hat{B}_{\mathrm{HBS}}|\alpha\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}} \\
&= \hat{B}_{\mathrm{HBS}}e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \hat{B}_{\mathrm{HBS}} |n\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}} \\
&= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \sum_{k=0}^{n} \sqrt{\frac{n!}{k!(n-k)!}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n |k\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |n-k\rangle_{\mathrm{B}} \\
&= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \sqrt{\frac{1}{k!(n-k)!}} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)^n |k\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |n-k\rangle_{\mathrm{B}} \\
&= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{k+m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{k+m} \frac{\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)^k}{\sqrt{k!}} |k\rangle_{\mathrm{A}} \otimes \frac{\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle_{\mathrm{B}} \\
&= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)^k}{\sqrt{k!}} |k\rangle_{\mathrm{A}} \otimes \frac{\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle_{\mathrm{B}} \\
&= e^{-\frac{\left|\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)^k}{\sqrt{k!}} |k\rangle_{\mathrm{A}} \otimes e^{-\frac{\left|\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right|^2}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle_{\mathrm{B}} \\
&= \left|\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_{\mathrm{A}} \otimes \left|\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_{\mathrm{B}}
\end{aligned}
$$

もう少し,「省エネ」の解答は以下の通りである.

$$
\begin{aligned}
&{}_{\mathrm{B}}\langle 0| \otimes {}_{\mathrm{A}}\langle \alpha| \hat{B}_{\mathrm{HBS}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathrm{A}} \hat{B}_{\mathrm{HBS}} |\alpha\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}} \\
&\quad = {}_{\mathrm{B}}\langle 0| \otimes {}_{\mathrm{A}}\langle \alpha| \frac{\hat{a}_{\mathrm{A}} - \hat{a}_{\mathrm{B}}}{\sqrt{2}} |\alpha\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}} \\
&\quad = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&{}_{\mathrm{B}}\langle 0| \otimes {}_{\mathrm{A}}\langle \alpha| \hat{B}_{\mathrm{HBS}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathrm{B}} \hat{B}_{\mathrm{HBS}} |\alpha\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}} \\
&\quad = {}_{\mathrm{B}}\langle 0| \otimes {}_{\mathrm{A}}\langle \alpha| \frac{\hat{a}_{\mathrm{A}} + \hat{a}_{\mathrm{B}}}{\sqrt{2}} |\alpha\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}} \\
&\quad = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

であり，コヒーレント状態は消滅演算子の固有状態であることを思い出すと，$\hat{B}_{\mathrm{HBS}}|\alpha\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}}$ は，$\left|\alpha/\sqrt{2}\right\rangle_{\mathrm{A}} \otimes \left|\alpha/\sqrt{2}\right\rangle_{\mathrm{B}}$ でなければならない．ただし，この「省エネ」解答は，入力が消滅演算子の固有状態であるからできた芸当で，一般の場合はこうはいかないから注意が必要である．

式 (1.195) の確認は省略. ■

ここまでの議論は単一光子状態を「光子」という1つの粒子として考えても余り問題はなかった. つまり, 量子力学の相補性における「粒子像」的な考え方で十分であった. しかし, 次の例では単一光子状態を「波動像」で考えなければならない.

今度は図 1.28 のように, ビームスプリッターの2つの入力ポートからそれぞれ単一光子状態 $|1\rangle$ が入力したとしよう. いままでと同様, ハーフビームスプリッター演算子で出力状態 $|\mathrm{EPR2}*\rangle_{\mathrm{AB}}$ を計算すると

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{EPR2}*\rangle_{\mathrm{AB}} &= \exp\left[-\frac{\pi}{4}(\hat{a}_{\mathrm{A}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathrm{B}} - \hat{a}_{\mathrm{A}}\hat{a}_{\mathrm{B}}^{\dagger})\right]|1\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |1\rangle_{\mathrm{B}}\,, \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |2\rangle_{\mathrm{B}} - |2\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}}\right) \qquad (1.195)
\end{aligned}
$$

となる. この出力も図 1.26 の場合同様エンタングルしている. ただし, この結果は粒子像では説明できない. なぜなら, ハーフビームスプリッターは 1/2 の確率で粒子を反射するか透過するマシンなのだから, 両方の出力モードにそれぞれ1つずつ光子が存在する状態 $|1\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |1\rangle_{\mathrm{B}}$ も許されるはずである. しかし, 式 (1.195) の結果はそうなっていない. 何が起こっているのであろうか. 解釈はやらないと宣言したが, それを翻して多少解釈すると, 2つの単一光子状態という「確率波」が「量子干渉」を起こし, それぞれの出力モードに1つずつ光子が

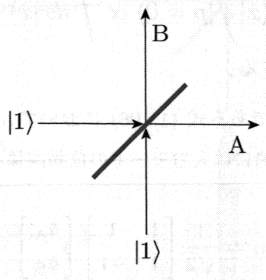


図 1.28　単一光子状態がそれぞれのモードからハーフビームスプリッターに入射

出現する確率を消し去ってしまうのである．単一光子状態に代えて，レーザー光のようなコヒーレント状態をハーフビームスプリッターに入力しても，普通の意味での干渉は起きるのだが，この「量子干渉」は起きない．つまり，これも入力状態の量子性に起因して起こる量子効果なのである (この場合は「波動像」である)．いずれにしても，量子エンタングルメントを得るためには，「純量子性」が必要となる．ということで，前の例と同様に，純粋に量子状態である単一光子状態 $|1\rangle$ を生成することができない現状では，生成が非常に困難である．

以上のように，ハーフビームスプリッターへ純粋に量子力学的状態 (非古典的状態) を入力すると量子エンタングルメントを生成できる (逆に，入れないとできない)．話を EPR 状態に戻そう．EPR 状態は，図 1.28 の単一光子状態の代わりに，電磁波の振幅演算子と見なせる $\hat{p}$ の固有状態で固有値 $p=0$ を持つ $|p=0\rangle$ と，$\hat{x}$ の固有状態で固有値 $x=0$ を持つ $|x=0\rangle$ を用いれば生成できる．この様子はハーフビームスプリッター演算子 $\hat{B}_{\mathrm{HBS}*}$ を

$$\hat{B}_{\mathrm{HBS}*} = \exp\left[\frac{\pi}{4}(\hat{a}_{\mathrm{A}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathrm{B}} - \hat{a}_{\mathrm{A}}\hat{a}_{\mathrm{B}}^{\dagger})\right]\exp\left[-i\frac{\pi}{2}(\hat{a}_{\mathrm{A}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathrm{A}} - \hat{a}_{\mathrm{B}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathrm{B}})\right] \times \exp\left[i\frac{\pi}{2}(\hat{a}_{\mathrm{A}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathrm{A}} + \hat{a}_{\mathrm{B}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathrm{B}})\right] \tag{1.196}$$

として[52]，次式で確認できる．

$$|\mathrm{EPR}\rangle_{\mathrm{AB}} = \hat{B}_{\mathrm{HBS}*}|p=0\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |x=0\rangle_{\mathrm{B}} = c\int dx|x\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |x\rangle_{\mathrm{B}} \tag{1.198}$$

ただし，

$$|p=0\rangle = \left(\int dx|x\rangle\langle x|\right)|p=0\rangle \propto \int dx|x\rangle$$

を用い，c は適当な定数とする．

---

[52] ビームスプリッター演算子である式 (1.106) において，$\Lambda=\pi$，$\Psi=-\pi$，$\Theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\Phi=0$ とした．これは実験的には入力モードの位相関係を適当に調整することに相当する．また，

$$\hat{B}_{\mathrm{HBS}*}^{\dagger}\begin{bmatrix}\hat{a}_{\mathrm{A}}\\ \hat{a}_{\mathrm{B}}\end{bmatrix}\hat{B}_{\mathrm{HBS}*} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{a}_{\mathrm{A}}\\ \hat{a}_{\mathrm{B}}\end{bmatrix} \tag{1.197}$$

となっている．この位相関係の利点は，上式の右辺の逆行列がそれ自身となり，計算が簡単になることである．そのため，理論家が愛用しているようである．もちろん，実験的にはいままでのビームスプリッター演算子と本質的な違いはない．

ここまでの話だと，実験的には $|p=0\rangle$ や $|x=0\rangle$ を生成することはできないから，状況は単一光子状態と同じような気がする．しかし，この場合のほうが少しだけマシである．$|p=0\rangle$ や $|x=0\rangle$ は，スクイーズされた真空場のスクイージングパラメーター r が $r\to\infty$ となった理想極限であるが，有限の r でも量子エンタングルメントを生成できる．つまり，図 1.29 のような場合を考える．ただし，もう少し計算をし易くするために，図 1.30 のようにスクイーズされた真空場を真空場から生成することとし，1 ステップ前から考える．出力状態を $|\mathrm{EPR}*\rangle_{\mathrm{AB}}$ とすると，

$$\begin{aligned}
|\mathrm{EPR}*\rangle_{\mathrm{AB}} &= \hat{B}_{\mathrm{HBS}*}\hat{S}_{\mathrm{A}}(-r)\hat{S}_{\mathrm{B}}(r)|0\rangle_{\mathrm{A}}\otimes|0\rangle_{\mathrm{B}} \\
&= \hat{B}_{\mathrm{HBS}*}\exp\left[\frac{r}{2}(\hat{a}_{\mathrm{A}}^{\dagger 2}-\hat{a}_{\mathrm{A}}^{2})\right]\exp\left[\frac{r}{2}(\hat{a}_{\mathrm{B}}^{2}-\hat{a}_{\mathrm{B}}^{\dagger 2})\right]|0\rangle_{\mathrm{A}}\otimes|0\rangle_{\mathrm{B}} \\
&= \hat{B}_{\mathrm{HBS}*}\exp\left[\frac{r}{2}(\hat{a}_{\mathrm{A}}^{\dagger 2}-\hat{a}_{\mathrm{A}}^{2}+\hat{a}_{\mathrm{B}}^{2}-\hat{a}_{\mathrm{B}}^{\dagger 2})\right]\hat{B}_{\mathrm{HBS}*}^{\dagger}|0\rangle_{\mathrm{A}}\otimes|0\rangle_{\mathrm{B}} \\
&= \exp\left[r(\hat{a}_{\mathrm{A}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathrm{B}}^{\dagger}-\hat{a}_{\mathrm{A}}\hat{a}_{\mathrm{B}})\right]|0\rangle_{\mathrm{A}}\otimes|0\rangle_{\mathrm{B}} \qquad (1.199)
\end{aligned}$$

である．ここで，2 つのスクイーズされた真空場のスクイージングパラメーターは等しいとし，式 (1.139) のスクイーズ演算子 $\hat{S}(r)$ を用いた．また，上式の 3 つ目の等号は，入力が真空場 $|0\rangle_{\mathrm{A}}\otimes|0\rangle_{\mathrm{B}}$ なので，架空のビームスプリッター (演算子)$\hat{B}_{\mathrm{HBS}*}^{\dagger}$ を加えても結果は変わらないこと (エネルギー保存則) を用いて

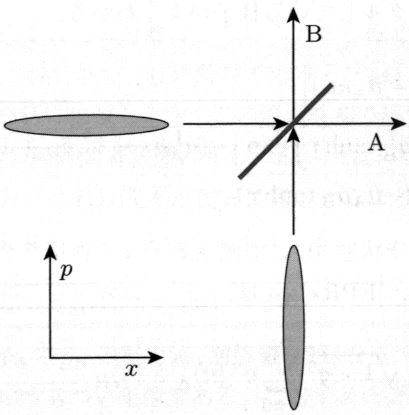


図 1.29　スクイーズされた真空場がそれぞれのモードからハーフビームスプリッターに入射．

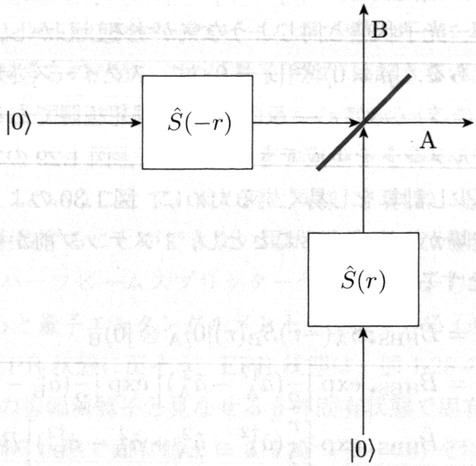


図 1.30 図 1.29 において，スクイーズされた真空場の部分を真空場とスクイーズ生成装置 (例えば光パラメトリック発振器) で置き換える．

いる．歴史的には，$\hat{S}_{\mathrm{AB}}(r) = \exp\left[r(\hat{a}_{\mathrm{A}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathrm{B}}^{\dagger} - \hat{a}_{\mathrm{A}}\hat{a}_{\mathrm{B}})\right]$ を 2 モードスクイージング演算子，$|\mathrm{EPR}*\rangle_{\mathrm{AB}}$ を 2 モードスクイーズされた真空場と呼んでいる．

式 (1.199) の結果を，次式で示した公式を用いて，光子数基底 $|n\rangle$ で書き直してみるとエンタングルしている様子がよくわかる．

$$\begin{aligned}
&\exp\left[r(\hat{a}_{\mathrm{A}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathrm{B}}^{\dagger} - \hat{a}_{\mathrm{A}}\hat{a}_{\mathrm{B}})\right] \\
&\quad = \exp\left(\hat{a}_{\mathrm{A}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathrm{B}}^{\dagger}\tanh r\right)\exp\left[-(\hat{a}_{\mathrm{A}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathrm{A}} + \hat{a}_{\mathrm{B}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathrm{B}} + 1)\ln(\cosh r)\right] \\
&\qquad \times \exp\left(-\hat{a}_{\mathrm{A}}\hat{a}_{\mathrm{B}}\tanh r\right) \qquad (1.200)
\end{aligned}$$

この公式を用い，真空状態 $|0\rangle$ に消滅演算子 $\hat{a}$ を作用させると 0 になって消えることに注意すると，$|\mathrm{EPR}*\rangle_{\mathrm{AB}}$ は，

$$|\mathrm{EPR}*\rangle_{\mathrm{AB}} = \sqrt{1-q^2}\sum_{n=0}^{\infty} q^n \,|n\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |n\rangle_{\mathrm{B}} \qquad (1.201)$$

となる．ここで，$q = \tanh r$ であり，スクイーズの程度が上がる (つまり r が大きくなる) と q は 1 に近づき，$q \to 1$ の極限 ($r \to \infty$：無限のスクイーズ)

で，$|\mathrm{EPR}*\rangle_{\mathrm{AB}} \to |\mathrm{EPR}\rangle_{\mathrm{AB}}$ となる．もちろん，式 (1.201) から明らかであるが，これは不可能である．なぜなら $q \to 1$ となると n が大きい場合の確率振幅 q^n が無視できなくなり，無限のエネルギー (光子数) の存在が必要だからである．しかし，r が 0 でなければ，つまりほんの少しでもスクイーズしていれば，モード A と B はエンタングルしていることがわかる．

$|\mathrm{EPR}*\rangle_{\mathrm{AB}}$ のウィグナー関数 $W_{\mathrm{EPR}*}(x_{\mathrm{A}}, p_{\mathrm{A}}; x_{\mathrm{B}}, p_{\mathrm{B}})$ を示そう．2 つのスクイーズされた真空場をビームスプリッターで合波すればよいことから，2 つのスクイーズされた真空場のウィグナー関数 (式 (1.184) 参照) に，ビームスプリッターの「座標変換」を施せばよい．

$$
\begin{aligned}
&W_{\mathrm{EPR}*}(x_{\mathrm{A}}, p_{\mathrm{A}}; x_{\mathrm{B}}, p_{\mathrm{B}}) \\
&= W_{\mathrm{sv}}^{(-r)}\left(\frac{x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{B}}}{\sqrt{2}}, \frac{p_{\mathrm{A}}+p_{\mathrm{B}}}{\sqrt{2}}\right) W_{\mathrm{sv}}^{(r)}\left(\frac{x_{\mathrm{A}}-x_{\mathrm{B}}}{\sqrt{2}}, \frac{p_{\mathrm{A}}-p_{\mathrm{B}}}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{4}{\pi^2}\exp\{-e^{+2r}[(x_{\mathrm{A}}-x_{\mathrm{B}})^2+(p_{\mathrm{A}}+p_{\mathrm{B}})^2] \\
&\qquad -e^{-2r}[(x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{B}})^2+(p_{\mathrm{A}}-p_{\mathrm{B}})^2]\}
\end{aligned}
\tag{1.202}
$$

したがって，$r \to \infty$ とすると，式 (1.202) は式 (1.190) と一致する．つまり，完全な EPR 状態となる．ただし，先ほども述べたように，$r \to \infty$ とならなくても r が零でなければ，量子エンタングルメントは存在する．それは $r > 0$ において，式 (1.202) が $W(x_{\mathrm{A}}, p_{\mathrm{A}}) \times W(x_{\mathrm{B}}, p_{\mathrm{B}})$ のように，A，B それぞれのウィグナー関数の積のかたちに分離できないことから確認できる．

ここまでの話は主に純粋状態 (波動関数で書ける状態) について述べてきたが，もう少し一般的な話に拡張しよう．この節の最初の部分で，EPR 状態とは $\hat{x}_{\mathrm{A}} - \hat{x}_{\mathrm{B}}$ と $\hat{p}_{\mathrm{A}} + \hat{p}_{\mathrm{B}}$ の同時固有状態のうち，$x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{B}} = 0$，$p_{\mathrm{A}} + p_{\mathrm{B}} = 0$ の固有値を持つものとした．これは我々が現実に測定することが可能な量子力学的期待値 $\langle\ \rangle$ を用いて表現すると，次式のようになる．

$$
\langle[\varDelta(\hat{x}_{\mathrm{A}} - \hat{x}_{\mathrm{B}})]^2\rangle + \langle[\varDelta(\hat{p}_{\mathrm{A}} + \hat{p}_{\mathrm{B}})]^2\rangle = 0 \tag{1.203}
$$

つまり，$\hat{x}_{\mathrm{A}} - \hat{x}_{\mathrm{B}}$ と $\hat{p}_{\mathrm{A}} + \hat{p}_{\mathrm{B}}$ の平均値 (期待値) ではなく，分散 (差の 2 乗平均) がつねに零であるというきつい条件である．このイメージを図 1.31 に示す．イメージとは各瞬間において必ず $x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{B}} = 0$ かつ $p_{\mathrm{A}} + p_{\mathrm{B}} = 0$ となるということである．ただし，これはあくまでもイメージであり，このような時間変化

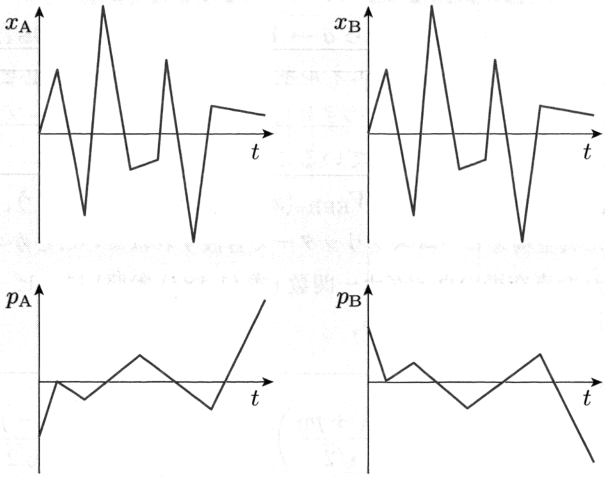


図 1.31 EPR 状態における x_A と x_B，p_A と p_B の間の関係のイメージ
横軸は時間であり，グラフは変数の時間変化を表している．もちろん，あくまでもイメージであることに注意．

を直接観察することはできない．

前述したように，完全な EPR 状態を実験で生成することは不可能である．しかし，これも前述したように，量子エンタングルした状態を生成することは可能である．そこで，式 (1.203) の条件を緩和することを考える．

次の不等式を満たせば，量子系 A と B は量子エンタングルしていることが知られている[53]．

$$\langle[\Delta(\hat{x}_A - \hat{x}_B)]^2\rangle + \langle[\Delta(\hat{p}_A + \hat{p}_B)]^2\rangle < 1 \tag{1.204}$$

ここで例えば量子系 A，B がエンタングルしていない (セパラブルな) 真空場であったとする．つまり，A，B 全体の状態が $|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B$ であったとすると，$\langle\Delta\hat{A}^2\rangle = \langle\psi|\hat{A}^2|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle^2$ であるから，

$$\langle[\Delta(\hat{x}_A - \hat{x}_B)]^2\rangle + \langle[\Delta(\hat{p}_A + \hat{p}_B)]^2\rangle$$

[53] L.-M. Duan *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2722 (2000) および R. Simon, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2726 (2000).

$$
\begin{aligned}
&= {}_{\mathrm{B}}\langle 0| \otimes {}_{\mathrm{A}}\langle 0|(\hat{x}_{\mathrm{A}} - \hat{x}_{\mathrm{B}})^2|0\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}} \\
&\quad - [{}_{\mathrm{B}}\langle 0| \otimes {}_{\mathrm{A}}\langle 0|(\hat{x}_{\mathrm{A}} - \hat{x}_{\mathrm{B}})|0\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}}]^2 \\
&\quad + {}_{\mathrm{B}}\langle 0| \otimes {}_{\mathrm{A}}\langle 0|(\hat{p}_{\mathrm{A}} + \hat{p}_{\mathrm{B}})^2|0\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}} \\
&\quad - [{}_{\mathrm{B}}\langle 0| \otimes {}_{\mathrm{A}}\langle 0|(\hat{p}_{\mathrm{A}} + \hat{p}_{\mathrm{B}})|0\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}}]^2 \\
&= 1
\end{aligned}
\tag{1.205}
$$

となる．ただし，$\alpha = 0$ とした式 (1.112)，(1.114) を用いた．したがって，この例では不等式 (1.204) を満たさないことがわかる．

不等式 (1.204) を満たす例として，再び 2 モードスクイーズされた真空場 $|\mathrm{EPR}*\rangle_{\mathrm{AB}}$ について考えてみよう．演算子 $\hat{S}'_{\mathrm{AB}}(r)$ を次式のように定義する[54)]．

$$
\hat{S}'_{\mathrm{AB}}(r) = \hat{B}_{\mathrm{HBS}*} \exp\left[\frac{r}{2}(\hat{a}_{\mathrm{A}}^{\dagger 2} - \hat{a}_{\mathrm{A}}^2)\right] \exp\left[\frac{r}{2}(\hat{a}_{\mathrm{B}}^2 - \hat{a}_{\mathrm{B}}^{\dagger 2})\right] \tag{1.206}
$$

これを用いると，2 モードスクイーズされた真空場は

$$
|\mathrm{EPR}*\rangle_{\mathrm{AB}} = \hat{S}'_{\mathrm{AB}}(r)|0\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}}
$$

となる．したがって，この状態の

$$
\langle[\Delta(\hat{x}_{\mathrm{A}} - \hat{x}_{\mathrm{B}})]^2\rangle + \langle[\Delta(\hat{p}_{\mathrm{A}} + \hat{p}_{\mathrm{B}})]^2\rangle
$$

は次のように計算できる．

$$
\begin{aligned}
&\langle[\Delta(\hat{x}_{\mathrm{A}} - \hat{x}_{\mathrm{B}})]^2\rangle + \langle[\Delta(\hat{p}_{\mathrm{A}} + \hat{p}_{\mathrm{B}})]^2\rangle \\
&= {}_{\mathrm{AB}}\langle \mathrm{EPR}*|(\hat{x}_{\mathrm{A}} - \hat{x}_{\mathrm{B}})^2|\mathrm{EPR}*\rangle_{\mathrm{AB}} \\
&\quad - [{}_{\mathrm{AB}}\langle \mathrm{EPR}*|(\hat{x}_{\mathrm{A}} - \hat{x}_{\mathrm{B}})|\mathrm{EPR}*\rangle_{\mathrm{AB}}]^2 \\
&\quad + {}_{\mathrm{AB}}\langle \mathrm{EPR}*|(\hat{p}_{\mathrm{A}} + \hat{p}_{\mathrm{B}})^2|\mathrm{EPR}*\rangle_{\mathrm{AB}} \\
&\quad - [{}_{\mathrm{AB}}\langle \mathrm{EPR}*|(\hat{p}_{\mathrm{A}} + \hat{p}_{\mathrm{B}})|\mathrm{EPR}*\rangle_{\mathrm{AB}}]^2 \\
&= {}_{\mathrm{B}}\langle 0| \otimes {}_{\mathrm{A}}\langle 0|\hat{S}'^{\dagger}_{\mathrm{AB}}(r)(\hat{x}_{\mathrm{A}} - \hat{x}_{\mathrm{B}})^2\hat{S}'_{\mathrm{AB}}(r)|0\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}} \\
&\quad -[{}_{\mathrm{B}}\langle 0| \otimes {}_{\mathrm{A}}\langle 0|\hat{S}'^{\dagger}_{\mathrm{AB}}(r)(\hat{x}_{\mathrm{A}} - \hat{x}_{\mathrm{B}})\hat{S}'_{\mathrm{AB}}(r)|0\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}}]^2 \\
&\quad + {}_{\mathrm{B}}\langle 0| \otimes {}_{\mathrm{A}}\langle 0|\hat{S}'^{\dagger}_{\mathrm{AB}}(r)(\hat{p}_{\mathrm{A}} + \hat{p}_{\mathrm{B}})^2\hat{S}'_{\mathrm{AB}}(r)|0\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}} \\
&\quad - [{}_{\mathrm{B}}\langle 0| \otimes {}_{\mathrm{A}}\langle 0|\hat{S}'^{\dagger}_{\mathrm{AB}}(r)(\hat{p}_{\mathrm{A}} + \hat{p}_{\mathrm{B}})\hat{S}'_{\mathrm{AB}}(r)|0\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}}]^2
\end{aligned}
\tag{1.207}
$$

---

54) 2 つのスクイーズされた真空場の相対位相を 90° から −90° に変えているだけで，本質的には何の変化もない．単に計算が簡単になるだけである．

ここで，ハイゼンベルク描像とし，2つ目の右辺の演算子について考える．

$$\begin{aligned}
&\hat{S}'^{\dagger}_{\mathrm{AB}}(-r)(\hat{x}_{\mathrm{A}} - \hat{x}_{\mathrm{B}})^2 \hat{S}'_{\mathrm{AB}}(-r) \\
&= \hat{S}'^{\dagger}_{\mathrm{AB}}(-r)(\hat{x}_{\mathrm{A}} - \hat{x}_{\mathrm{B}})\hat{S}'_{\mathrm{AB}}(-r)\hat{S}'^{\dagger}_{\mathrm{AB}}(-r)(\hat{x}_{\mathrm{A}} - \hat{x}_{\mathrm{B}})\hat{S}'_{\mathrm{AB}}(-r) \\
&= \left(\frac{e^{-r}\hat{x}_{\mathrm{A}} + e^{r}\hat{x}_{\mathrm{B}}}{\sqrt{2}} - \frac{e^{-r}\hat{x}_{\mathrm{A}} - e^{r}\hat{x}_{\mathrm{B}}}{\sqrt{2}}\right)^2 \\
&= 2e^{2r}\hat{x}_{\mathrm{B}}^2
\end{aligned} \tag{1.208}$$

$$\begin{aligned}
&\hat{S}'^{\dagger}_{\mathrm{AB}}(r)(\hat{x}_{\mathrm{A}} - \hat{x}_{\mathrm{B}})\hat{S}'_{\mathrm{AB}}(r) \\
&= \frac{e^{r}\hat{x}_{\mathrm{A}} + e^{-r}\hat{x}_{\mathrm{B}}}{\sqrt{2}} - \frac{e^{r}\hat{x}_{\mathrm{A}} - e^{-r}\hat{x}_{\mathrm{B}}}{\sqrt{2}} \\
&= \sqrt{2}e^{-r}\hat{x}_{\mathrm{B}}
\end{aligned} \tag{1.209}$$

$$\begin{aligned}
&\hat{S}'^{\dagger}_{\mathrm{AB}}(r)(\hat{p}_{\mathrm{A}} + \hat{p}_{\mathrm{B}})^2 \hat{S}'_{\mathrm{AB}}(r) \\
&= \hat{S}'^{\dagger}_{\mathrm{AB}}(r)(\hat{p}_{\mathrm{A}} + \hat{p}_{\mathrm{B}})\hat{S}'_{\mathrm{AB}}(r)\hat{S}'^{\dagger}_{\mathrm{AB}}(r)(\hat{p}_{\mathrm{A}} + \hat{p}_{\mathrm{B}})\hat{S}'_{\mathrm{AB}}(r) \\
&= \left(\frac{e^{-r}\hat{p}_{\mathrm{A}} + e^{r}\hat{p}_{\mathrm{B}}}{\sqrt{2}} + \frac{e^{-r}\hat{p}_{\mathrm{A}} - e^{r}\hat{p}_{\mathrm{B}}}{\sqrt{2}}\right)^2 \\
&= 2e^{-2r}\hat{p}_{\mathrm{A}}^2
\end{aligned} \tag{1.210}$$

$$\begin{aligned}
&\hat{S}'^{\dagger}_{\mathrm{AB}}(r)(\hat{p}_{\mathrm{A}} + \hat{p}_{\mathrm{B}})^2 \hat{S}'_{\mathrm{AB}}(r) \\
&= \frac{e^{-r}\hat{p}_{\mathrm{A}} + e^{r}\hat{p}_{\mathrm{B}}}{\sqrt{2}} + \frac{e^{-r}\hat{p}_{\mathrm{A}} - e^{r}\hat{p}_{\mathrm{B}}}{\sqrt{2}} \\
&= \sqrt{2}e^{-r}\hat{p}_{\mathrm{A}}
\end{aligned} \tag{1.211}$$

ここで，式 (1.139)，(1.197) を用いた．これらの結果から，2モードスクイーズされた真空場において，

$$\langle[\Delta(\hat{x}_{\mathrm{A}} - \hat{x}_{\mathrm{B}})]^2\rangle + \langle[\Delta(\hat{p}_{\mathrm{A}} + \hat{p}_{\mathrm{B}})]^2\rangle = e^{-2r} \tag{1.212}$$

となり，$r > 0$ ならエンタングルしていることがわかる．

ハイゼンベルク描像が出てきたついでに，量子光学で行われている因習について触れておこう．量子光学では因習として，消滅演算子 $\hat{a}$ を電磁波の複素振幅のように扱うことは以前述べた．そうする理由は，ビームスプリッターなどの光学素子における電磁波の複素振幅の変化を，あたかも実験を行っているように追っていけることにある．その例を式 (1.208)–(1.211) において見ていこ

う．まず，次式のように $\hat{x}'_{\mathrm{A}}$，$\hat{p}'_{\mathrm{A}}$，$\hat{x}'_{\mathrm{B}}$，$\hat{p}'_{\mathrm{B}}$ を定義する．

$$\begin{cases} \hat{x}'_{\mathrm{A}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{r} \hat{x}_{\mathrm{A}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{-r} \hat{x}_{\mathrm{B}} \\ \hat{p}'_{\mathrm{A}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{-r} \hat{p}_{\mathrm{A}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{r} \hat{p}_{\mathrm{B}} \\ \hat{x}'_{\mathrm{B}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{r} \hat{x}_{\mathrm{A}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{-r} \hat{x}_{\mathrm{B}} \\ \hat{p}'_{\mathrm{B}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{-r} \hat{p}_{\mathrm{A}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{r} \hat{p}_{\mathrm{B}} \end{cases} \tag{1.213}$$

これらを用いると式 (1.207) は，

$$\begin{aligned} &\langle [\varDelta(\hat{x}_{\mathrm{A}} - \hat{x}_{\mathrm{B}})]^2 \rangle + \langle [\varDelta(\hat{p}_{\mathrm{A}} + \hat{p}_{\mathrm{B}})]^2 \rangle \\ &= {}_{\mathrm{B}}\langle 0| \otimes {}_{\mathrm{A}}\langle 0| (\hat{x}'_{\mathrm{A}} - \hat{x}'_{\mathrm{B}})^2 |0\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}} \\ &\quad - [{}_{\mathrm{B}}\langle 0| \otimes {}_{\mathrm{A}}\langle 0| (\hat{x}'_{\mathrm{A}} - \hat{x}'_{\mathrm{B}}) |0\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}}]^2 \\ &\quad + {}_{\mathrm{B}}\langle 0| \otimes {}_{\mathrm{A}}\langle 0| (\hat{p}'_{\mathrm{A}} + \hat{p}'_{\mathrm{B}})^2 |0\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}} \\ &\quad - [{}_{\mathrm{B}}\langle 0| \otimes {}_{\mathrm{A}}\langle 0| (\hat{p}'_{\mathrm{A}} + \hat{p}'_{\mathrm{B}}) |0\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}}]^2 \end{aligned} \tag{1.214}$$

となる．この関係を念頭に置き，式 (1.213) を次のように書き換える．

$$\begin{cases} \hat{x}_{\mathrm{A}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{r} \hat{x}_{\mathrm{A}}^{(0)} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{-r} \hat{x}_{\mathrm{B}}^{(0)} \\ \hat{p}_{\mathrm{A}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{-r} \hat{p}_{\mathrm{A}}^{(0)} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{r} \hat{p}_{\mathrm{B}}^{(0)} \\ \hat{x}_{\mathrm{B}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{r} \hat{x}_{\mathrm{A}}^{(0)} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{-r} \hat{x}_{\mathrm{B}}^{(0)} \\ \hat{p}_{\mathrm{B}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{-r} \hat{p}_{\mathrm{A}}^{(0)} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{r} \hat{p}_{\mathrm{B}}^{(0)} \end{cases} \tag{1.215}$$

ここで，式 (1.213) の左辺の肩にある ′ (プライム) を外し，代わりに右辺の肩に (0) を加えている．このようにする御利益は，演算子は式 (1.215) で与えられ，状態は $|0\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}}$ として

$$\langle [\varDelta(\hat{x}_{\mathrm{A}} - \hat{x}_{\mathrm{B}})]^2 \rangle + \langle [\varDelta(\hat{p}_{\mathrm{A}} + \hat{p}_{\mathrm{B}})]^2 \rangle$$

を直接計算できることである．つまり，ハーフビームスプリッターの入力に，直交した方向にスクイーズした 2 つのスクイーズされた真空場

$$\hat{a}_{\rm A} = e^r \hat{x}_{\rm A}^{(0)} + e^{-r} \hat{p}_{\rm A}^{(0)}, \quad \hat{a}_{\rm B} = e^{-r} \hat{x}_{\rm B}^{(0)} + e^r \hat{p}_{\rm B}^{(0)}$$

が入力している様子が直接イメージできる．もちろん，肩の (0) は計算するときに用いる状態が $|0\rangle_{\rm A} \otimes |0\rangle_{\rm B}$ であることを表している．このように，量子光学では，ハイゼンベルク描像を用いながらも，その式の中に状態の情報を埋め込んでおくという高等テクニック (?) を用いることが因習になっている．このような方法はとても計算が楽になり便利なのだが，ここまで書いてきたことが背景にあることを忘れると大失態を犯す場合もあるので注意してほしい．

次に実験的に量子エンタングルメント存在の有無を判定する方法について説明しよう．図 1.32 にその例を示す．この方法では量子エンタングルメントの有無を判別する 2 つのモードのそれぞれをバランス型ホモダイン測定し，その差または和をスペクトラムアナライザーを用いて測定する．$\langle [\varDelta(\hat{x}_{\rm A} - \hat{x}_{\rm B})]^2 \rangle$ を測定する場合は，2 つのローカルオシレーター光の位相をそれぞれ x 成分に固定し，バランス型ホモダイン測定で得られる光電流 (あるいはそれに比例した電圧) の差をスペクトラムアナライザーで測定する．同様に $\langle [\varDelta(\hat{p}_{\rm A} + \hat{p}_{\rm B})]^2 \rangle$ を

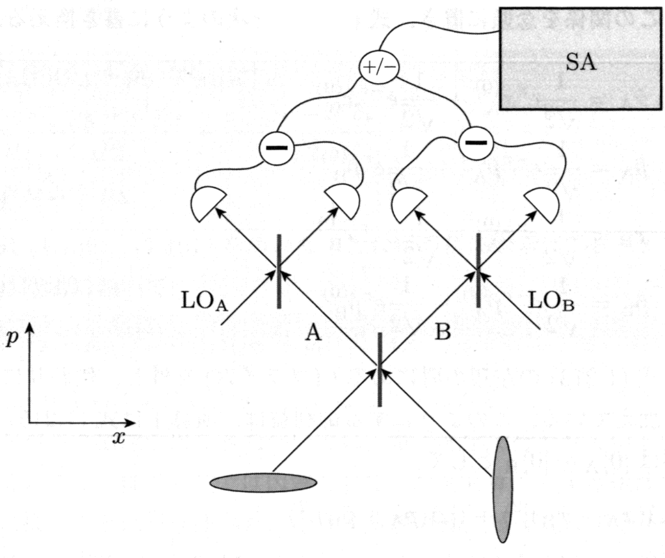


図 1.32 量子エンタングルメント存在の有無を判定する方法
LO：ローカルオシレーター光，SA：スペクトラムアナライザー

測定する場合は，2つのローカルオシレーター光の位相をそれぞれ p 成分に固定し，光電流の和を測定する．

図 1.33 に図 1.32 の測定結果例を示す．この例では，2 モードスクイーズされた真空場について測定を行っている．まず，図 1.33 の (a) および (b) を見ると，位相に関係なく真空場レベルより大きなノイズ (信号) レベルとなっている．これは，式 (1.201) から明らかなように，A，B それぞれのモード単独で測定すると，式 (1.156) のような密度演算子を持つ黒体輻射の状態になっていることを示している．図 1.33 の (c) は，$\langle[\varDelta(\hat{x}_{\mathrm{A}}-\hat{x}_{\mathrm{B}})]^2\rangle$ と $\langle[\varDelta(\hat{p}_{\mathrm{A}}+\hat{p}_{\mathrm{B}})]^2\rangle$ の測定結果である．無相関の場合である

$$\langle[\varDelta(\hat{x}_{\mathrm{A}}^{(0)}-\hat{x}_{\mathrm{B}}^{(0)})]^2\rangle=\langle[\varDelta(\hat{p}_{\mathrm{A}}^{(0)}+\hat{p}_{\mathrm{B}}^{(0)})]^2\rangle=\frac{1}{2}$$

のレベルに比べ，3dB 程度下がっていることがわかる．つまり，

$$\langle[\varDelta(\hat{x}_{\mathrm{A}}-\hat{x}_{\mathrm{B}})]^2\rangle+\langle[\varDelta(\hat{p}_{\mathrm{A}}+\hat{p}_{\mathrm{B}})]^2\rangle\approx 0.5<1 \tag{1.216}$$

となり，モード A と B はエンタングルしていることがわかる．

1.11.2 3者間の量子エンタングルメント

ここまでは，2 者間の量子エンタングルメントについて述べてきた．後述するが，量子コンピュータとは多者間の量子エンタングルメント制御ともいえるため，2 者間の量子エンタングルメントを多者間に拡張することは非常に重要である．一気に N 者間に拡張してもよいが，3 者間に拡張しただけでエッセンスは十分堪能できるため，ここでは 3 者間の量子エンタングルメントについて述べる．

小節 1.11.1 で述べたように，2 者間で完全にエンタングルした状態である EPR 状態は $\hat{x}_{\mathrm{A}}-\hat{x}_{\mathrm{B}}$ と $\hat{p}_{\mathrm{A}}+\hat{p}_{\mathrm{B}}$ の同時固有状態である．この考え方は 3 者間の場合にも拡張できる．つまり，3 者が完全に量子エンタングルした状態である GHZ (グリーンバーガー・ホーン・ザイリンガー) 状態[55]は，EPR 状態と同じ理屈で $\hat{x}_{\mathrm{A}}-\hat{x}_{\mathrm{B}}$，$\hat{x}_{\mathrm{B}}-\hat{x}_{\mathrm{C}}$，$\hat{x}_{\mathrm{C}}-\hat{x}_{\mathrm{A}}$，$\hat{p}_{\mathrm{A}}+\hat{p}_{\mathrm{B}}+\hat{p}_{\mathrm{C}}$ の同時固有状態と考えられる[56]．EPR 状態と同様,「真の」GHZ 状態を実験的に生成するのは不可

---

[55] D. M. Greenberger, M. A. Horne, A. Shimony, and A. Zeilinger, *Am. J. Phys.* **58**, 1131 (1990).

[56] これらの演算子は交換するので，同時固有状態が存在する．

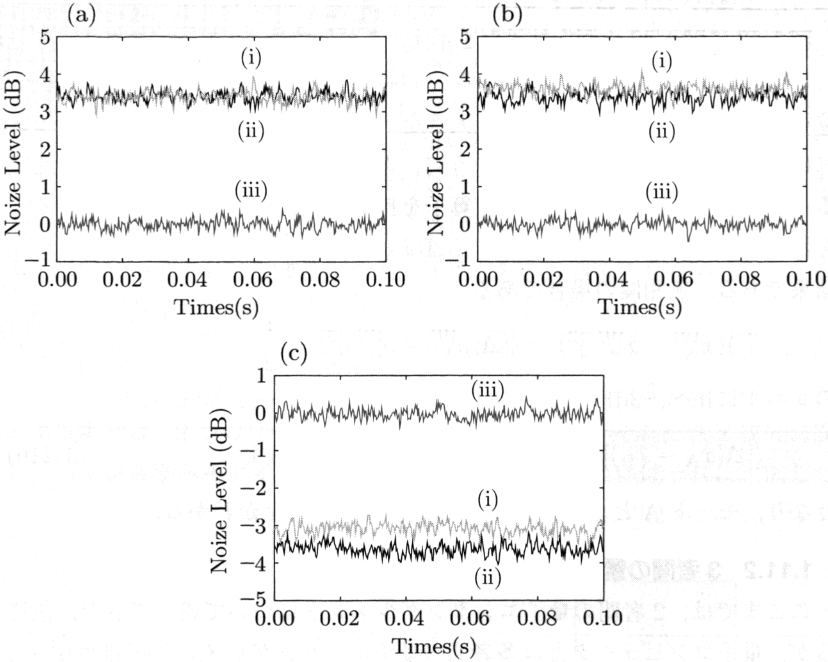


図 1.33　図 1.32 の測定結果例

(a)　モード A に対する測定結果 (A 側のバランス型ホモダイン測定の結果).

(i) $\langle \varDelta \hat{x}_{\mathrm{A}}^2 \rangle$,

(ii) $\langle \varDelta \hat{p}_{\mathrm{A}}^2 \rangle$,

(iii) 真空場レベルつまり $\langle (\varDelta \hat{x}_{\mathrm{A}}^{(0)})^2 \rangle = \langle (\varDelta \hat{p}_{\mathrm{A}}^{(0)})^2 \rangle = 1/4$.

(b)　モード B に対する測定結果.

(i) $\langle \varDelta \hat{x}_{\mathrm{B}}^2 \rangle$,

(ii) $\langle \varDelta \hat{p}_{\mathrm{B}}^2 \rangle$,

(iii) 真空場レベルつまり $\langle (\varDelta \hat{x}_{\mathrm{B}}^{(0)})^2 \rangle = \langle (\varDelta \hat{p}_{\mathrm{B}}^{(0)})^2 \rangle = 1/4$.

(c)　量子エンタングルメント存在の有無を判定する実験結果.

(i) $\langle [\varDelta (\hat{x}_{\mathrm{A}} - \hat{x}_{\mathrm{B}})]^2 \rangle$,

(ii) $\langle [\varDelta (\hat{p}_{\mathrm{A}} + \hat{p}_{\mathrm{B}})]^2 \rangle$,

(iii) $\langle [\varDelta (\hat{x}_{\mathrm{A}}^{(0)} - \hat{x}_{\mathrm{B}}^{(0)})]^2 \rangle = \langle [\varDelta (\hat{p}_{\mathrm{A}}^{(0)} + \hat{p}_{\mathrm{B}}^{(0)})]^2 \rangle = 1/2$

能なので条件を緩める．

次の 3 つの不等式のうち 2 つの不等式を満たせば，3 者間エンタングルメントの存在することが知られている[57]．

$$\begin{cases} \text{I.} & \langle[\Delta(\hat{x}_{\rm A}-\hat{x}_{\rm B})]^2\rangle+\langle[\Delta(\hat{p}_{\rm A}+\hat{p}_{\rm B}+g_{\rm C}\hat{p}_{\rm C})]^2\rangle<1 \\ \text{II.} & \langle[\Delta(\hat{x}_{\rm B}-\hat{x}_{\rm C})]^2\rangle+\langle[\Delta(g_{\rm A}\hat{p}_{\rm A}+\hat{p}_{\rm B}+\hat{p}_{\rm C})]^2\rangle<1 \\ \text{III.} & \langle[\Delta(\hat{x}_{\rm C}-\hat{x}_{\rm A})]^2\rangle+\langle[\Delta(\hat{p}_{\rm A}+g_{\rm B}\hat{p}_{\rm B}+\hat{p}_{\rm C})]^2\rangle<1 \end{cases} \tag{1.217}$$

ただし，$g_{\rm A}$，$g_{\rm B}$，$g_{\rm C}$ は適当な実数である．不等式 (1.204) と (1.217) を比べると明らかであるが，3 者間の場合は適当な実数 $g_{\rm A}$，$g_{\rm B}$，$g_{\rm C}$ があり，状況はかなり複雑である．これは，2 者の場合は量子 A と B がエンタングルしているか否かしかないが，3 者の場合は，例えば量子 A，B，C 全体で考えるとエンタングルしているが，量子 A と B はエンタングルしていないような場合が存在するからである．このことについて考えてみよう．

まず，$g_{\rm A}=g_{\rm B}=g_{\rm C}=1$ の場合を考える．この場合，不等式 (1.217) は次のようになる．

$$\begin{cases} \text{I.} & \langle[\Delta(\hat{x}_{\rm A}-\hat{x}_{\rm B})]^2\rangle+\langle[\Delta(\hat{p}_{\rm A}+\hat{p}_{\rm B}+\hat{p}_{\rm C})]^2\rangle<1 \\ \text{II.} & \langle[\Delta(\hat{x}_{\rm B}-\hat{x}_{\rm C})]^2\rangle+\langle[\Delta(\hat{p}_{\rm A}+\hat{p}_{\rm B}+\hat{p}_{\rm C})]^2\rangle<1 \\ \text{III.} & \langle[\Delta(\hat{x}_{\rm C}-\hat{x}_{\rm A})]^2\rangle+\langle[\Delta(\hat{p}_{\rm A}+\hat{p}_{\rm B}+\hat{p}_{\rm C})]^2\rangle<1 \end{cases} \tag{1.218}$$

この不等式の左辺を零に近づけていけば，$\hat{x}_{\rm A}-\hat{x}_{\rm B}$，$\hat{x}_{\rm B}-\hat{x}_{\rm C}$，$\hat{x}_{\rm C}-\hat{x}_{\rm A}$，$\hat{p}_{\rm A}+\hat{p}_{\rm B}+\hat{p}_{\rm C}$ の同時固有状態 (固有値 $x_{\rm A}-x_{\rm B}=0$，$x_{\rm B}-x_{\rm C}=0$，$x_{\rm C}-x_{\rm A}=0$，$p_{\rm A}+p_{\rm B}+p_{\rm C}=0$) に近づく[58]．つまり「真の」GHZ 状態に近づく．したがって，左辺が零に近くこの不等式を満たせば,「真の」GHZ 状態に近い状態となる．

不等式 (1.218) の対極として，不等式 (1.217) において $g_{\rm A}=g_{\rm B}=g_{\rm C}=0$ とした次式の場合がある．

---

57) P. van Loock and A. Furusawa, *Phys. Rev. A* **67**, 052315 (2003).

58) EPR 状態と同様，固有値としては零以外もありうるが，零としても一般性を失わないのでそのようにしている．

$$\begin{cases} \text{I.} & \langle[\Delta(\hat{x}_\mathrm{A}-\hat{x}_\mathrm{B})]^2\rangle+\langle[\Delta(\hat{p}_\mathrm{A}+\hat{p}_\mathrm{B})]^2\rangle<1 \\ \text{II.} & \langle[\Delta(\hat{x}_\mathrm{B}-\hat{x}_\mathrm{C})]^2\rangle+\langle[\Delta(\hat{p}_\mathrm{B}+\hat{p}_\mathrm{C})]^2\rangle<1 \\ \text{III.} & \langle[\Delta(\hat{x}_\mathrm{C}-\hat{x}_\mathrm{A})]^2\rangle+\langle[\Delta(\hat{p}_\mathrm{C}+\hat{p}_\mathrm{A})]^2\rangle<1 \end{cases} \tag{1.219}$$

この不等式を満たせば，不等式 (1.204) から量子 A と B，B と C，C と A はそれぞれエンタングルしていることがいえる．3 つの量子系において全ての組合せで 2 者間エンタングルしていれば，3 者間でもエンタングルしているように思えるので，これが 3 者間エンタングルメント存在の「本当の」条件だと誤解するかもしれない．これは大きな誤解である．実は「真の」意味での 3 者間エンタングルメントと考えられる GHZ 状態 (あるいは不等式 (1.218) の左辺が零に近づいた GHZ 状態に近い状態) では，不等式 (1.219) を満たさない．つまり，GHZ 状態 (あるいはそれに近い状態) では 3 つの量子のうち 2 つを取り出してもエンタングルしていないのである．3 者間のエンタングルメントが 2 者間の場合に比べ格段に複雑になっていることがわかる．

3 者間量子エンタングルメントを実験的に生成することを考えよう．その例として，GHZ 状態に近い状態を 3 つのスクイーズされた真空場と 2 つのビームスプリッターで生成する方法を示そう．図 1.34 に，その方法で 3 者間量子エンタングルメントを生成し，不等式 (1.218) を検証するための実験配置を示す[59]．式 (1.215) の表記法にならい，生成された状態を記述すると，

$$\begin{cases} \hat{x}_\mathrm{A}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{+r_\mathrm{A}}\hat{x}_\mathrm{A}^{(0)}+\sqrt{\dfrac{2}{3}}e^{-r_\mathrm{B}}\hat{x}_\mathrm{B}^{(0)} \\ \hat{p}_\mathrm{A}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{-r_\mathrm{A}}\hat{p}_\mathrm{A}^{(0)}+\sqrt{\dfrac{2}{3}}e^{+r_\mathrm{B}}\hat{p}_\mathrm{B}^{(0)} \\ \hat{x}_\mathrm{B}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{+r_\mathrm{A}}\hat{x}_\mathrm{A}^{(0)}-\dfrac{1}{\sqrt{6}}e^{-r_\mathrm{B}}\hat{x}_\mathrm{B}^{(0)}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-r_\mathrm{C}}\hat{x}_\mathrm{C}^{(0)} \\ \hat{p}_\mathrm{B}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{-r_\mathrm{A}}\hat{p}_\mathrm{A}^{(0)}-\dfrac{1}{\sqrt{6}}e^{+r_\mathrm{B}}\hat{p}_\mathrm{B}^{(0)}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{+r_\mathrm{C}}\hat{p}_\mathrm{C}^{(0)} \\ \hat{x}_\mathrm{C}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{+r_\mathrm{A}}\hat{x}_\mathrm{A}^{(0)}-\dfrac{1}{\sqrt{6}}e^{-r_\mathrm{B}}\hat{x}_\mathrm{B}^{(0)}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-r_\mathrm{C}}\hat{x}_\mathrm{C}^{(0)} \\ \hat{p}_\mathrm{C}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{-r_\mathrm{A}}\hat{p}_\mathrm{A}^{(0)}-\dfrac{1}{\sqrt{6}}e^{+r_\mathrm{B}}\hat{p}_\mathrm{B}^{(0)}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{+r_\mathrm{C}}\hat{p}_\mathrm{C}^{(0)} \end{cases} \tag{1.220}$$

---

59) T. Aoki *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 080404 (2003).

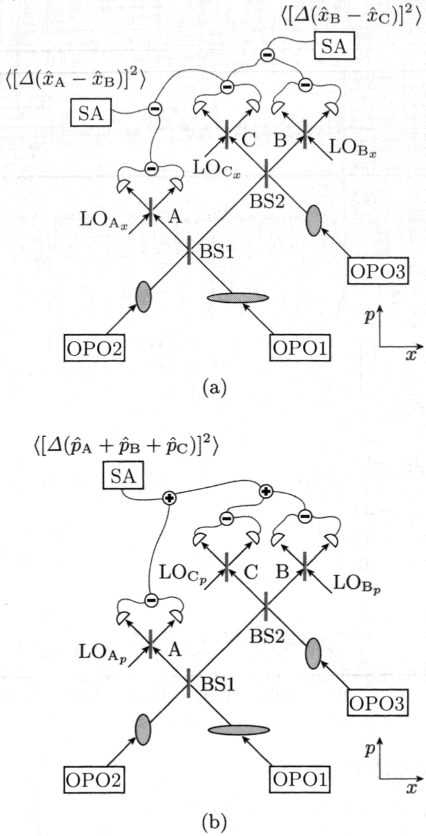


図 1.34 3 者間量子エンタングルメントを生成し，不等式 (1.218) を検証するための実験配置．BS1 のみ分岐比 1:2 のビームスプリッターで，その他は全てハーフビームスプリッターである．

となる．ここで，r_A，r_B，r_C はスクイージングパラメーターである．式 (1.220) において $r_A = r_B = r_C \to \infty$ とすると，この状態が GHZ 状態に近づくことがわかる．

図 1.35 に，図 1.34 で示した実験結果の例を示す．図 1.35 の結果から不等式 (1.218) の右辺を計算すると，

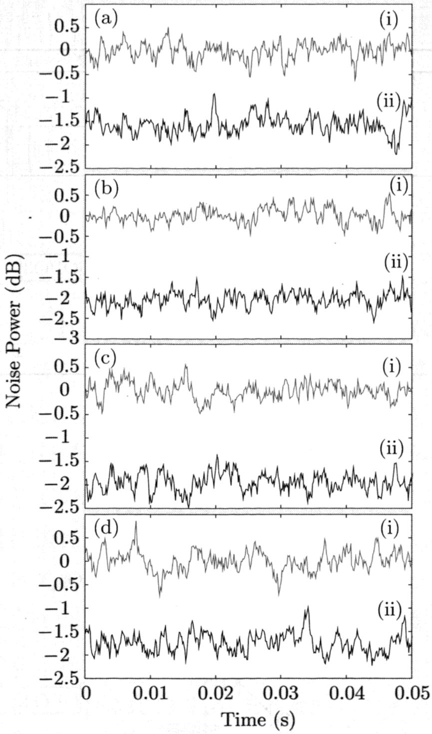


図 1.35 図 1.34 の結果の例

(a) $\langle[\Delta(\hat{x}_{\mathrm{A}}-\hat{x}_{\mathrm{B}})]^2\rangle$, (b) $\langle[\Delta(\hat{x}_{\mathrm{B}}-\hat{x}_{\mathrm{C}})]^2\rangle$, (c) $\langle[\Delta(\hat{x}_{\mathrm{C}}-\hat{x}_{\mathrm{A}})]^2\rangle$, (d) $\langle[\Delta(\hat{p}_{\mathrm{A}}+\hat{p}_{\mathrm{B}}+\hat{p}_{\mathrm{C}})]^2\rangle$ のレベルを示し，(i) は無相関の場合 (入力が全て真空場の場合)，(ii) は入力をスクイーズド光とした場合である．また，入力が全て真空場の場合，$\langle[\Delta(\hat{x}_{\mathrm{A}}-\hat{x}_{\mathrm{B}})]^2\rangle = \langle[\Delta(\hat{x}_{\mathrm{B}}-\hat{x}_{\mathrm{C}})]^2\rangle = \langle[\Delta(\hat{x}_{\mathrm{C}}-\hat{x}_{\mathrm{A}})]^2\rangle = 1/2$ であり，$\langle[\Delta(\hat{p}_{\mathrm{A}}+\hat{p}_{\mathrm{B}}+\hat{p}_{\mathrm{C}})]^2\rangle = 3/4$ である．

$$\begin{cases} \text{I.} \quad \langle[\Delta(\hat{x}_1-\hat{x}_2)]^2\rangle + \langle[\Delta(\hat{p}_1+\hat{p}_2+\hat{p}_3)]^2\rangle = 0.851 \pm 0.062 < 1 \\ \text{II.} \quad \langle[\Delta(\hat{x}_2-\hat{x}_3)]^2\rangle + \langle[\Delta(\hat{p}_1+\hat{p}_2+\hat{p}_3)]^2\rangle = 0.840 \pm 0.065 < 1 \\ \text{III.} \quad \langle[\Delta(\hat{x}_3-\hat{x}_1)]^2\rangle + \langle[\Delta(\hat{p}_1+\hat{p}_2+\hat{p}_3)]^2\rangle = 0.867 \pm 0.062 < 1 \end{cases} \tag{1.221}$$

となっていることから，3 者間でエンタングルしていることがわかる．

1 章の問題

□ **1**　式 (1.26) を導け.

□ **2**　量子化された調和振動子の p に関する運動方程式 (シュレディンガーの方程式) が, 式 (1.32) となることを確かめよ.

□ **3**　調和振動子の系において, 突然壁が x の正の方向へ $\sqrt{\dfrac{2\hbar}{m\omega}}\alpha$ だけ移動した場合, 固有状態の重ね合わせの係数が式 (1.38) となることを示せ.

□ **4**　磁束密度演算子 $\hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r})$ が, 式 (1.54) となることを示せ.

□ **5**　ハイゼンベルク描像での電場演算子 $\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)$ が, 式 (1.61) となることを示せ.

□ **6**　ハイゼンベルク描像での磁束密度演算子 $\hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)$ が, 式 (1.62) となることを示せ.

□ **7**　式 (1.68) を確かめよ.

□ **8**　式 (1.59) で示した公式を用いて, 式 (1.100), (1.104), (1.105) を確かめよ.

□ **9**　式 (1.101)–(1.103) で定義した演算子 $\hat{L}_i$ は, 角運動量演算子と同じ交換関係を満たすことを示せ.

□ **10**　コヒーレント状態の電場の期待値 $\langle\alpha|\hat{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t)|\alpha\rangle$ が, 式 (1.109) となることを示せ.

□ **11**　式 (1.112)–(1.115) を確認せよ.

□ **12**　式 (1.128) を確認せよ.

□ **13**　式 (1.134) を確認せよ.

□ **14**　$|\beta=0\rangle_g=\hat{S}(r)|0\rangle$ であることを用いて, 式 (1.143) を確認せよ.

□ **15**　式 (1.144) を確認せよ.

□ **16**　式 (1.148), (1.149) を確認せよ.

□ **17**　式 (1.157)–(1.159) を確認せよ.

□ **18** 式 (1.162)，(1.163) を確認せよ．

□ **19** もともと -10dB のレベルのスクイーズされた真空場に 50%のロスがあった場合のスクイーズとアンチスクイーズのレベルを計算せよ．

□ **20** 50%のロスがあった場合，もともとどんなに高いレベルのスクイーズでも観測されるスクイーズのレベルが -3dB を超えないことを示せ．

□ **21** 式 (1.181)，(1.183) を確認せよ．

□ **22** 2 光子状態 $|2\rangle$ のウィグナー関数を計算せよ．

□ **23** 式 (1.198) を確認せよ．

□ **24** 式 (1.201) を確認せよ．また，-10dB のスクイーズを用いたと仮定し，この状態には何光子まで存在すると考えてよいか考察せよ．

□ **25** 式 (1.202) を確認し，この式において $r \to \infty$ とすると，式 (1.190) に一致することを確かめよ．

□ **26** 式 (1.212) を確認せよ．

2 量子情報物理

本章では，量子光学を用いた量子情報処理について解説する．特に，その最も基本的な量子ゲート群である量子テレポーテーションについて詳しく解説する．さらに，その応用ともいえる量子エラーコレクションについて述べる．

2章で学ぶ概念・キーワード

- 量子テレポーテーション
- 量子エラーコレクション

2.1 量子情報と量子エンタングルメント

「情報」について考えてみよう．現在の情報科学における情報量は，場合の数を底2として対数表現したビット数で表現されるのが一般的である．1ビットの情報とは(0か1かの)2つの状態を取りうるときの場合の数である．例えば0から7までの数は8個あるから，$\log_2 8 = 3$から3ビットの情報量である．同じことであるが，0から7までの数は二進数表記すれば，3桁(3ビット)で表現できる．つまり，

$$0_{(10)} = 000_{(2)},\ 1_{(10)} = 001_{(2)},\ \cdots,\ 7_{(10)} = 111_{(2)}$$

となっている(当たり前だが)．量子情報では，個々のビットを量子状態(ベクトル)とし0，1をそれぞれ$|0\rangle$，$|1\rangle$とする[1)]．したがって，0から7までの状態ベクトルは

$$|0_{(10)}\rangle = |0\rangle|0\rangle|0\rangle,\ |1_{(10)}\rangle = |0\rangle|0\rangle|1\rangle,\ \cdots,\ |7_{(10)}\rangle = |1\rangle|1\rangle|1\rangle$$

のようになる．ただし，

$$|000\rangle = |0\rangle|0\rangle|0\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle$$

であり，$\otimes$は直積を表す．このように書くと気分は量子情報であるが，実質は古典情報の二進数表記と全く変わらない．

この状況は，各ビットを表す量子状態として，$c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$ $(|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1)$のように，$|0\rangle$，$|1\rangle$の重ね合わせまで許せば一変する．ここで$c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$のことを量子ビットと呼んでいる．直感的にいうと，古典情報では各ビットが0または1でなければならないが，量子情報ではその重ね合わせも許すのである．重ね合わせの状態はシュレディンガーの猫の例で述べたように純粋に量子力学的状態であり，古典的なアナロジーは存在しない不思議な状態である．例として，3量子ビットで表現される

$$\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

を考える．

---

1) $|0\rangle$，$|1\rangle$は直交し，規格化されている．

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\\
&\quad=\frac{1}{2\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle|0\rangle+|0\rangle|0\rangle|1\rangle+\cdots+|1\rangle|1\rangle|1\rangle)\\
&\quad=\frac{1}{2\sqrt{2}}(|0_{(10)}\rangle+|1_{(10)}\rangle+\cdots+|7_{(10)}\rangle)
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

上式より，3 量子ビットで表現される

$$
\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)
$$

は，0 から 7 までの数の重ね合わせであり，8 通りの状態の重ね合わせであることがわかる．つまり，3 量子ビットで 8 つの状態を表しているといえる．この御利益は，使う量子ビット数 n に対して，重ね合わせで表現できる状態の数が 2^n となることから，n が大きくなると飛躍的に大きくなる．

量子コンピュータ (量子情報処理) では，このような重ね合わせの状態を一括処理して一種の並列計算を行う．ただし，通常の並列処理とは意味が違う．その様子を見ていこう．

通常，情報処理とは入力 1 つに対し出力を 1 つ出すことを基本にしている．例えば，$f(x)$ で象徴されるような情報処理では，図 2.1 のように x に対しては $f(x)$ を出力するようになっている．また，通常の並列処理は図 2.2 のようにこれを n 個並べるのに近い[2)]．この場合，並列処理によるスピードアップはほぼ

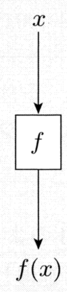


図 2.1 通常の情報処理

---

2) 図 2.2 の場合はそれぞれの $f(x)$ は完全に独立に見えるが，実際には同期を取るなど，完全には独立でない．しかし，後述する量子エンタングルメントのある場合との違いを強調して別々にかいている．あくまでもイメージ図であることに注意．

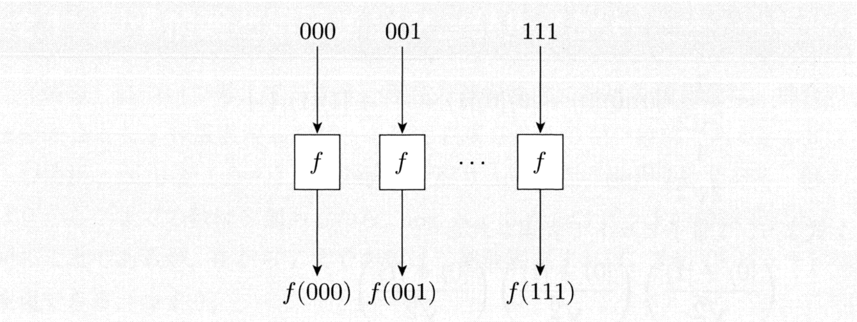


図 2.2　通常の並列処理
あくまでもイメージ図であることに注意．

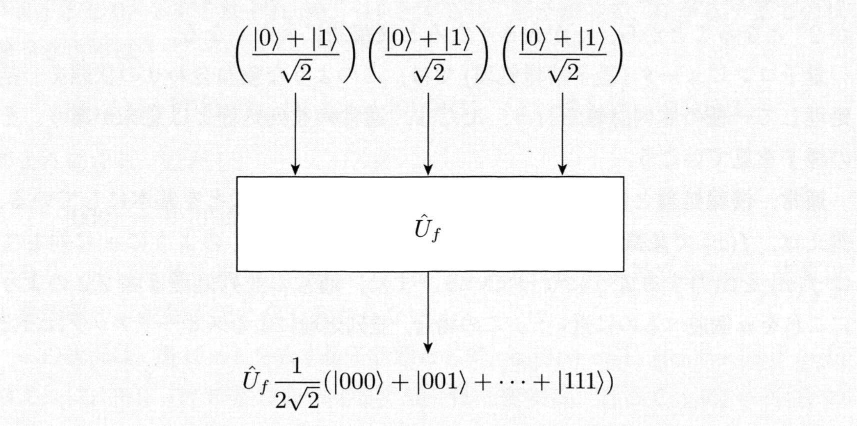


図 2.3　量子情報処理
あくまでもイメージ図であることに注意．

n に比例する．

それに対し量子情報処理は，図 2.3 のように入力を重ね合わせの状態で入れ，$\hat{U}_f$ で表されるユニタリー変換で一括処理し，出力も重ね合わせの状態で出力する．つまり，重ね合わせ状態を使って並列処理を行っている．ところが，これだけだと，図 2.2 でイメージされる通常の並列処理と変わらない．重ね合わせの数だけコンピュータを並べれば済むように思われる．しかし，量子情報処理はこれとは桁違いに高速で情報処理を実行できる．ここで，情報処理の速さと

は，処理に必要な論理ゲートの数 (計算のステップ数) と個々の論理ゲートの速さの積である．量子情報処理では，量子ビット間の量子エンタングルメントを用いて，計算のステップ数を桁違いに減らし高速化を行っている[3)]．

量子エンタングルメントを用いると，どうしてそんなに劇的に計算のステップ数が減るのか，その一般論についてはまだあまり明らかにはなっていないが，次のように考えると少しわかったような気になる．例えば，量子エンタングルした状態 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_{\mathrm{A}}|0\rangle_{\mathrm{B}}+|1\rangle_{\mathrm{A}}|1\rangle_{\mathrm{B}})$ を考えよう．これは次のように式変形できる．

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}}&(|0\rangle_{\mathrm{A}}|0\rangle_{\mathrm{B}}+|1\rangle_{\mathrm{A}}|1\rangle_{\mathrm{B}})\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{|0\rangle_{\mathrm{A}}+|1\rangle_{\mathrm{A}}}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{|0\rangle_{\mathrm{B}}+|1\rangle_{\mathrm{B}}}{\sqrt{2}}\right)\right.\\&\qquad\left.+\left(\frac{|0\rangle_{\mathrm{A}}-|1\rangle_{\mathrm{A}}}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{|0\rangle_{\mathrm{B}}-|1\rangle_{\mathrm{B}}}{\sqrt{2}}\right)\right]\end{aligned}\tag{2.2}$$

つまり，量子ビット A が 0 なら量子ビット B も 0，量子ビット A が 1 なら量子ビット B も 1 となっている (この重ね合わせになっている) だけではなく，量子ビット A が $\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$ なら量子ビット B も $\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$，量子ビット A が $\left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$ なら量子ビット B も $\left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$ となり，式変形においても相関が保存されている．この式変形は $|0\rangle$，$|1\rangle$ から $\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$，$\left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$ への基底変換とも考えられるが，量子エンタングルしている場合，基底変換に対してこのような相関がつねに保存される．言い方を替えれば，どのような見方 (座標系) でも相関が存在しているといえる．量子情報処理では，このようにあらゆる座標系でも相関が存在していることを利用して計算のステップ数を劇的に減らしているとも考えられる．

量子エンタングルメントの相関について述べたついでに古典的相関についても触れておく．量子ビット A が 0 なら量子ビット B も 0，量子ビット A が 1 なら量子ビット B も 1 となっているような古典相関は，次のような密度演算子で

3) M. A. Nielsen, I. L. Chuang 著：*Quantum Computation and Quantum Information* 参照．

記述できる．

$$\hat{\rho}_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2}\Big(|0\rangle_{\mathrm{A}\,\mathrm{A}}\langle 0| \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}\,\mathrm{B}}\langle 0| + |1\rangle_{\mathrm{A}\,\mathrm{A}}\langle 1| \otimes |1\rangle_{\mathrm{B}\,\mathrm{B}}\langle 1|\Big) \tag{2.3}$$

ちなみに，量子エンタングルした状態

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_{\mathrm{A}}\,|0\rangle_{\mathrm{B}} + |1\rangle_{\mathrm{A}}\,|1\rangle_{\mathrm{B}})$$

の密度演算子 $\hat{\rho}_{\mathrm{q}}$ は次式で書ける．

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{\mathrm{q}} = &\frac{1}{2}\Big(|0\rangle_{\mathrm{A}\,\mathrm{A}}\langle 0| \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}\,\mathrm{B}}\langle 0| + |1\rangle_{\mathrm{A}\,\mathrm{A}}\langle 1| \otimes |1\rangle_{\mathrm{B}\,\mathrm{B}}\langle 1|\Big)\\ &+ \frac{1}{2}\Big(|0\rangle_{\mathrm{A}\,\mathrm{A}}\langle 1| \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}\,\mathrm{B}}\langle 1| + |1\rangle_{\mathrm{A}\,\mathrm{A}}\langle 0| \otimes |1\rangle_{\mathrm{B}\,\mathrm{B}}\langle 0|\Big)\end{aligned} \tag{2.4}$$

右辺第 1 項が古典的相関を表している．第 2 項 (非対角成分) が $\hat{\rho}_{\mathrm{c}}$ との差である．上述の例にならって，次のような座標変換を施す．

$$\begin{cases} |S\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + |1\rangle\Big) \\ |D\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle - |1\rangle\Big) \end{cases} \tag{2.5}$$

このとき，$\hat{\rho}_{\mathrm{c}}$ と $\hat{\rho}_{\mathrm{q}}$ は，次のように変換される．

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{\mathrm{c}} = \frac{1}{4}\Big[&\Big(|S\rangle_{\mathrm{A}\,\mathrm{A}}\langle S| + |D\rangle_{\mathrm{A}\,\mathrm{A}}\langle D|\Big) \otimes \Big(|S\rangle_{\mathrm{B}\,\mathrm{B}}\langle S| + |D\rangle_{\mathrm{B}\,\mathrm{B}}\langle D|\Big)\\ &+\Big(|S\rangle_{\mathrm{A}\,\mathrm{A}}\langle D| + |D\rangle_{\mathrm{A}\,\mathrm{A}}\langle S|\Big) \otimes \Big(|S\rangle_{\mathrm{B}\,\mathrm{B}}\langle D| + |D\rangle_{\mathrm{B}\,\mathrm{B}}\langle S|\Big)\Big]\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{\mathrm{q}} = &\frac{1}{2}\Big(|S\rangle_{\mathrm{A}\,\mathrm{A}}\langle S| \otimes |S\rangle_{\mathrm{B}\,\mathrm{B}}\langle S| + |D\rangle_{\mathrm{A}\,\mathrm{A}}\langle D| \otimes |D\rangle_{\mathrm{B}\,\mathrm{B}}\langle D|\Big)\\ &+ \frac{1}{2}\Big(|S\rangle_{\mathrm{A}\,\mathrm{A}}\langle D| \otimes |S\rangle_{\mathrm{B}\,\mathrm{B}}\langle D| + |D\rangle_{\mathrm{A}\,\mathrm{A}}\langle S| \otimes |D\rangle_{\mathrm{B}\,\mathrm{B}}\langle S|\Big)\end{aligned} \tag{2.7}$$

式 (2.6) からわかるように，0，1 に関して古典的な相関を持つ $\hat{\rho}_{\mathrm{c}}$ の状態では，A，B の状態が S であるか D であるかの測定結果には何の相関もない．それに対し，式 (2.2) あるいは (2.7) からわかるように，量子エンタングルした状態では，依然として S，D に関しても相関を持ち続けている (A が「S」なら B も「S」，A が「D」なら B も「D」となっている)．このように見方 (座標) を

変えただけで，相関が消滅するのが古典的相関であるのに対し，見方 (座標) を変えても相関が存在し続けるのが，量子エンタングルメントである．古典的な相関に比べ量子エンタングルメントが強い相関であることがわかると思う．また，式 (2.3) と (2.4) を比べると明らかなように，この強い相関を生み出しているのは密度演算子の非対角成分である．重ね合わせの状態と同様，密度演算子の非対角成分の存在が「量子」と「古典」を分けている．

少し脱線してしまったが，要するに量子情報処理とは，重ね合わせの状態を使い，処理の途中に量子エンタングルメントを発生させ，計算のステップ数を劇的に少なくする情報処理だといえる[4)]．別の言い方をすれば，多数の量子系でエンタングルメントを生成し，その制御を行うことが量子情報処理であるといえる．量子情報の単位としては，ここまで述べてきた量子ビットがその代表例といえるが，実はそれだけではない．これは量子情報処理の特徴，つまり重ね合わせの状態，量子エンタングルメント，測定による波束の収縮などを活かすには，量子情報の単位として $c_0|0\rangle + c_1|1\rangle + \cdots + c_n|n\rangle$ を用いても全く同じことができるからである[5)]．例えば，図 2.4 のような状況が考えられる．つまり，量子情報の単位としては量子ビットのように 2 次元だけでなく，n 次元でも同様な議論ができる．また，現実に存在する物理量の大半は連続的に値を取れるという意味で無限次元 ($n \to \infty$) である．現実の物理系で量子情報処理を行う場合は，その物理系にとって最も効率の高い方法で行うのが賢いやり方だと考えられる．

現実に行われている研究は大雑把に言って 2 つに分けることができる．あるいは上述の 2 つの理想極限，つまり量子ビットと連続量 (無限次元) で行われているといえる．これは，現実の物理系は純粋な 2 準位系でも完全な連続量でもないため，両極の理想極限から攻めようという思想である．また，現在のコンピュータがコンデンサーに溜まった電圧 (連続量) のある値をしきい値と定め，しきい値より大きいものを 1，しきい値より小さいものを 0 としてデジタル化したように，量子情報でも連続量から量子ビット (あるいはその中間である n 次元量子情報) への変換は可能である．したがって，両者をことさら分け隔てす

[4)] もう少し詳しくいうと，測定による「波束の収縮」も積極的に利用する．

[5)] $|n\rangle$ は規格化直交基底である．

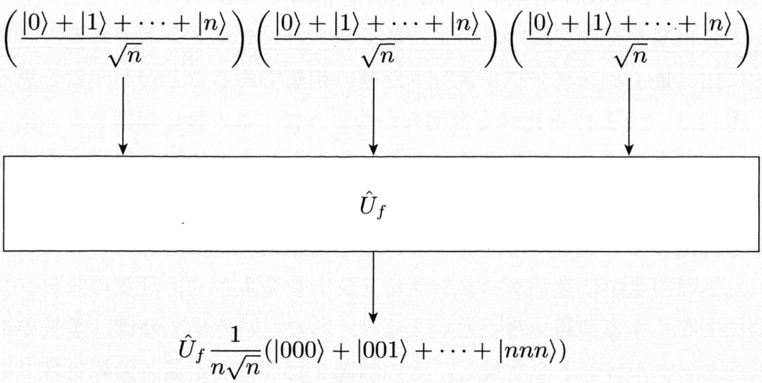


図 2.4　n 次元の量子情報処理
あくまでもイメージ図であることに注意.

る必要はなく，状況に応じて使い分けるのが最も賢いやり方だと思われる．まとめると，以下のようになる．

量子ビットと連続量

量子情報の単位として，2 つの理想極限があり，それぞれ量子ビット，連続量と呼ばれている．量子ビットは前述したように，

$$|\psi_2\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle = \sum_{n=0}^{1} c_n|n\rangle \tag{2.8}$$

であり，連続量は

$$|\psi\rangle = \int dx\psi(x)\,|x\rangle \tag{2.9}$$

のような一般の状態ベクトルである．ここで，$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ であり，$\int dx|\psi(x)|^2 = 1$ となっている．$\psi(x)$ はいわゆる波動関数である．量子ビットにおける「情報」は係数 c_0，c_1 のことであるが，連続量でも「係数」$\psi(x)$ が「情報」となっている．また，連続量も基底を $|n\rangle$ に替えれば，

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle \tag{2.10}$$

となることから，ある意味では量子ビットを含むといえる．

2.2 量子情報処理

図 2.3 に示したように，量子情報処理とは入力の量子情報 (量子状態 $|\psi_{\rm in}\rangle$) に (プログラムした) ユニタリー変換 $\hat{U}_f$ を施し，出力 $|\psi_{\rm out}\rangle$ を得ることである．式で書けば，

$$|\psi_{\rm out}\rangle = \hat{U}_f|\psi_{\rm in}\rangle \tag{2.11}$$

となる．また，ユニタリー変換 $\hat{U}_f$ は，式 (1.1) のようにハミルトニアン $\hat{H}_f$ を用いて

$$\hat{U}_f = e^{-i\frac{\hat{H}_f}{\hbar}t} \tag{2.12}$$

と書けるから，ユニバーサルな量子情報処理を行うためには，任意のハミルトニアンを用意しなければならない．任意のハミルトニアンを用意することなど途方もないことなので，ユニバーサルな量子情報処理は実現不可能と感じるかもしれない．しかし，案外そうでもないのである．これは以下の議論による．

ハミルトニアンを 2 つ用意できたとしよう．それぞれを $\hat{H}_1$，$\hat{H}_2$ とする．これは物理操作 (ユニタリー変換) として $\hat{U}_1 = e^{-i\frac{\hat{H}_1}{\hbar}t_1}$ と $\hat{U}_2 = e^{-i\frac{\hat{H}_2}{\hbar}t_2}$ が可能という状況である．このとき，物理操作 $\hat{U}_3 = e^{\frac{[\hat{H}_1,\hat{H}_2]}{\hbar}t_3}$ が可能になる．つまり，ハミルトニアン $\hat{H}_3 = i[\hat{H}_1, \hat{H}_2]$ も用意できることになる．このことは，以下のように考えることができる．

まず，ハミルトニアン $\hat{H}_1$，$\hat{H}_2$ が用意できれば，物理操作 $\hat{U}_1 = e^{-i\frac{\hat{H}_1}{\hbar}t_1}$，$\hat{U}_2 = e^{-i\frac{\hat{H}_2}{\hbar}t_2}$ が可能であり，時間的に $\hat{U}_1$，$\hat{U}_2$ の順で施される操作は，入力を $|\psi_{\rm in}\rangle$，出力を $|\psi_{\rm out}\rangle$ とすれば，

$$|\psi_{\rm out}\rangle = e^{-i\frac{\hat{H}_2}{\hbar}t_2}e^{-i\frac{\hat{H}_1}{\hbar}t_1}|\psi_{\rm in}\rangle \tag{2.13}$$

となる．また，

$$e^{i\hat{B}\delta t}e^{i\hat{A}\delta t}e^{-i\hat{B}\delta t}e^{-i\hat{A}\delta t} \sim e^{[\hat{A},\hat{B}]\delta t^2} \tag{2.14}$$

において[6]，$\hat{A} = \hat{H}_1$，$\hat{B} = \hat{H}_2$ とし，時間幅を適当にとれば，式 (2.13) と合

[6] このあたりのことは，吉田春夫,「シンプレクティック数値解法」，数理科学 **384**, p.37 (1995) に詳しい．

わせてハミルトニアン $\hat{H}_3 = i[\hat{H}_1, \hat{H}_2]$ に相当する物理操作も可能になることがわかる．さらに同様の議論で，ハミルトニアン $\hat{H}_1$，$\hat{H}_2$ が用意できれば，ハミルトニアン $\alpha\hat{H}_1 + \beta\hat{H}_2$($\alpha$，$\beta$ は任意の実数) も用意できることになる．

したがって，これを繰り返し使っていけば，用意できるハミルトニアンは

$$\hat{H}_1,\ \hat{H}_2,\ \alpha\hat{H}_1 + \beta\hat{H}_2,\ i[\hat{H}_1, \hat{H}_2],\ [\hat{H}_1, [\hat{H}_1, \hat{H}_2]],\ \cdots$$

のように増やすことができる．もし，交換子を用いて合成していく途中で，$\hat{U} = e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t}$ が恒等変換等となるハミルトニアンにならなければ，このような方法を用いて任意のハミルトニアンを用意できる[7)]．つまり，うまくハミルトニアン $\hat{H}_1$，$\hat{H}_2$ を用意できれば，任意のハミルトニアンを (原理的には) 用意したのと同じことになるのである．ただし，ここでは，任意のハミルトニアンを合成できる $\hat{H}_1$，$\hat{H}_2$ の組が存在するということだけをいっているのであって，$\hat{H}_1$，$\hat{H}_2$ が現実に用意できるかどうかについては何もいっていない．実際にはもう少し多数のハミルトニアンを用意し，任意のハミルトニアンを用意するように「努力する」のである．また，このように用意していったハミルトニアンによる物理操作の数 (量子情報処理的にはステップ数) が入力の大きさ (桁数) に対して指数関数的に増えてしまっては，量子情報処理としてのスピードは遅くなるばかりなので，ハミルトニアンの選び方は本当に難しい．

量子光学的にユニバーサルな量子情報処理を行うためには，次の5つのハミルトニアンがあればよいことが知られている．つまり，これらのハミルトニアンがあれば，交換操作により任意のハミルトニアンを合成できるのである．

ビームスプリッター：$\dfrac{1}{2i}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 - \hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\right)$

ディスプレースメント (変位)：$i(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})$

位相シフター：$\hat{a}^\dagger\hat{a}$

スクイーズ：$i(\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2})$

3次の非線形光学過程，例えば光カー効果：$\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2$

ここで1つ注意しておくと，ビームスプリッター以外は基本的には1つのモー

---

7) S. Lloyd, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 346 (1995) や，D. Deutsch, A. Barenco, and A. Ekert, *Proc. R. Soc. Lond. A* **449**, 669 (1995) などを参照のこと．

ドに対する操作 ($\hat{U}|\psi\rangle_1$) であるのに対し[8]，ビームスプリッターは 2 つのモードに対するもの ($\hat{U}|\psi\rangle_1 \otimes |\varphi\rangle_2$) になっている．ビームスプリッターを用いてマルチモード化，つまり処理する桁数を上げていくのである．

量子ビットの場合，それぞれの物理操作を量子論理ゲートと呼んでいる．その中で最も重要と考えられているのは，図 2.5 に示した制御ノットゲートである．上に挙げたハミルトニアンで構成できる量子論理ゲートの例として，制御ノットゲートを取り上げてみよう．制御ノットゲートの「動作」は以下のようである．

$$\begin{cases} |0_\mathrm{L}\rangle_1 \otimes |0_\mathrm{L}\rangle_2 \to |0_\mathrm{L}\rangle_1 \otimes |0_\mathrm{L}\rangle_2 \\ |0_\mathrm{L}\rangle_1 \otimes |1_\mathrm{L}\rangle_2 \to |0_\mathrm{L}\rangle_1 \otimes |1_\mathrm{L}\rangle_2 \\ |1_\mathrm{L}\rangle_1 \otimes |0_\mathrm{L}\rangle_2 \to |1_\mathrm{L}\rangle_1 \otimes |1_\mathrm{L}\rangle_2 \\ |1_\mathrm{L}\rangle_1 \otimes |1_\mathrm{L}\rangle_2 \to |1_\mathrm{L}\rangle_1 \otimes |0_\mathrm{L}\rangle_2 \end{cases} \tag{2.15}$$

ただし，$|0_\mathrm{L}\rangle$，$|1_\mathrm{L}\rangle$ は規格直交化された 2 つの基底ベクトルであれば何でもよく，真空場や単一光子状態でなくてもよい．また，これらはまとめると，

$$|x_\mathrm{L}\rangle \otimes |y_\mathrm{L}\rangle \to |x_\mathrm{L}\rangle \otimes |(x+y)_\mathrm{L} \bmod 2\rangle \quad (x, y = 0, 1)$$

となる．

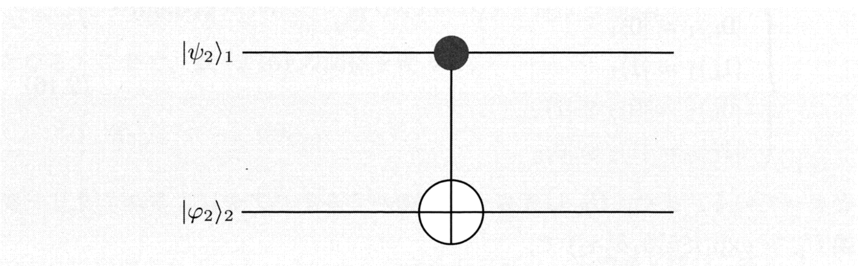


図 2.5 制御ノットゲート
$|\psi_2\rangle_1$，$|\varphi_2\rangle_2$ は入力量子ビットである．

---

[8] 3 次の非線形光学過程として 2 つのモードを用いる光カー効果を挙げたが，1 つのモードの 3 次の非線形光学効果である第 3 次高調波発生でもよい．

例題 2.1

制御ノットゲートの動作は式 (2.15) のようであるが，第1量子ビットに

$$c_0|0_\mathrm{L}\rangle + c_1|1_\mathrm{L}\rangle$$

を入力し，第2量子ビットに $|0_\mathrm{L}\rangle$ を入力した場合の制御ノットゲートの出力を示せ．

【解答】

$$\begin{aligned}(c_0|0_\mathrm{L}\rangle + c_1|1_\mathrm{L}\rangle) \otimes |0_\mathrm{L}\rangle &= c_0|0_\mathrm{L}\rangle \otimes |0_\mathrm{L}\rangle + c_1|1_\mathrm{L}\rangle \otimes |0_\mathrm{L}\rangle \\ &\xrightarrow{\text{CNOT}} c_0|0_\mathrm{L}\rangle \otimes |0_\mathrm{L}\rangle + c_1|1_\mathrm{L}\rangle \otimes |1_\mathrm{L}\rangle\end{aligned}$$ ■

これを量子光学的に実現するとき，

$$|0_\mathrm{L}\rangle = |0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2, \quad |1_\mathrm{L}\rangle = |1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2$$

とする場合と，

$$|0_\mathrm{L}\rangle = |0\rangle, \quad |1_\mathrm{L}\rangle = |1\rangle$$

とする場合をうまく使いわけると比較的簡単に実現できる[9]．もちろん，$|0\rangle$，$|1\rangle$ は真空場と単一光子状態である．この例について説明する．

図 2.6 に量子光学的に構成した制御ノットゲートを示す．ここでは，

$$\begin{cases} |0_\mathrm{L}\rangle_1 = |0\rangle_1 \\ |1_\mathrm{L}\rangle_1 = |1\rangle_1 \\ |0_\mathrm{L}\rangle_2 = |0\rangle_2 \otimes |1\rangle_3 \\ |1_\mathrm{L}\rangle_2 = |1\rangle_2 \otimes |0\rangle_3 \end{cases} \tag{2.16}$$

となっている．また，$\hat{U}_\mathrm{K}$ は光カー効果のハミルトニアンによるユニタリー変換 $\hat{U}_\mathrm{K} = \exp(i\xi\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2)$ で，

$$\begin{cases} \hat{U}_\mathrm{K}|0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 = |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 \\ \hat{U}_\mathrm{K}|0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 = |0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 \\ \hat{U}_\mathrm{K}|1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 = |1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 \\ \hat{U}_\mathrm{K}|1\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 = -|1\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 \end{cases} \tag{2.17}$$

---

9) M. A. Nielsen, I. L. Chuang 著，*Quantum Computation and Quantum Information* (Cambrigde University Press, Cambrigde, 2000) 参照．

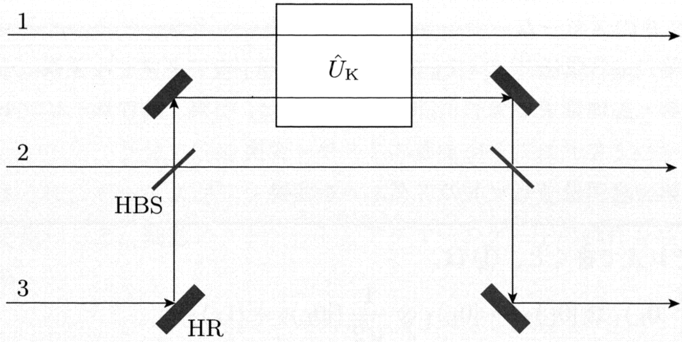


図 2.6 量子光学的に構成した制御ノットゲート
HBS：ハーフビームスプリッター，HR：全反射ミラー．
モード番号はビームスプリッターの透過モード間では等しいとする．

となるように，ξ を調整し $\xi = \pi$ としている[10)]．さらに，ハーフビームスプリッター演算子としては $\hat{B}^{(23)}_{\mathrm{HBS}} = \exp\left[\frac{\pi}{4}(\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_3 - \hat{a}_2 \hat{a}_3^\dagger)\right]$ を用いる．この変換では，

$$\begin{cases} \hat{B}^{(23)}_{\mathrm{HBS}}|0\rangle_2 \otimes |1\rangle_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_2 \otimes |1\rangle_3 + |1\rangle_2 \otimes |0\rangle_3\right) \\ \hat{B}^{(23)}_{\mathrm{HBS}}|1\rangle_2 \otimes |0\rangle_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_2 \otimes |1\rangle_3 - |1\rangle_2 \otimes |0\rangle_3\right) \end{cases} \tag{2.18}$$

となる．ここで，式 (2.16) の関係を使うと，

$$\begin{cases} |0_{\mathrm{L}}\rangle_2 \to \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|0_{\mathrm{L}}\rangle_2 + |1_{\mathrm{L}}\rangle_2\right) \\ |1_{\mathrm{L}}\rangle_2 \to \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|0_{\mathrm{L}}\rangle_2 - |1_{\mathrm{L}}\rangle_2\right) \end{cases} \tag{2.19}$$

のように変換されている．このような変換をアダマール変換と呼び，量子ビットの世界ではアダマール変換を行う量子論理ゲートをアダマールゲートと呼んでいる．アダマールゲートは制御ノットゲートと並び非常に重要な量子論理ゲートとなっている．また，アダマール変換の逆変換もアダマール変換自身となっている．

準備が整ったので，図 2.6 のスキームを説明する．このスキームは次の 3 段

---

10) 実験的には非線形光学定数に合わせて結晶長 (時間に相当) などを調整している．

階になっている．

図 2.6 のスキーム

① 第二論理量子ビット $c_{20}|0_{\mathrm{L}}\rangle_2 + c_{21}|1_{\mathrm{L}}\rangle_2$ のアダマール変換

② 第一論理量子ビット $c_{10}|0_{\mathrm{L}}\rangle_1 + c_{11}|1_{\mathrm{L}}\rangle_1$ と第二論理量子ビットの光カーハミルトニアンによるユニタリー変換

③ 第二論理量子ビットのアダマール変換

それぞれ式で書くと，① は，

$$\begin{cases} |0_{\mathrm{L}}\rangle_1 \otimes |0_{\mathrm{L}}\rangle_2 \to |0_{\mathrm{L}}\rangle_1 \otimes \dfrac{1}{\sqrt{2}}(|0_{\mathrm{L}}\rangle_2 + |1_{\mathrm{L}}\rangle_2) \\ |0_{\mathrm{L}}\rangle_1 \otimes |1_{\mathrm{L}}\rangle_2 \to |0_{\mathrm{L}}\rangle_1 \otimes \dfrac{1}{\sqrt{2}}(|0_{\mathrm{L}}\rangle_2 - |1_{\mathrm{L}}\rangle_2) \\ |1_{\mathrm{L}}\rangle_1 \otimes |0_{\mathrm{L}}\rangle_2 \to |1_{\mathrm{L}}\rangle_1 \otimes \dfrac{1}{\sqrt{2}}(|0_{\mathrm{L}}\rangle_2 + |1_{\mathrm{L}}\rangle_2) \\ |1_{\mathrm{L}}\rangle_1 \otimes |1_{\mathrm{L}}\rangle_2 \to |1_{\mathrm{L}}\rangle_1 \otimes \dfrac{1}{\sqrt{2}}(|0_{\mathrm{L}}\rangle_2 - |1_{\mathrm{L}}\rangle_2) \end{cases} \tag{2.20}$$

となり，② は，

$$\begin{cases} |0_{\mathrm{L}}\rangle_1 \otimes \dfrac{1}{\sqrt{2}}(|0_{\mathrm{L}}\rangle_2 + |1_{\mathrm{L}}\rangle_2) \to |0_{\mathrm{L}}\rangle_1 \otimes \dfrac{1}{\sqrt{2}}(|0_{\mathrm{L}}\rangle_2 + |1_{\mathrm{L}}\rangle_2) \\ |0_{\mathrm{L}}\rangle_1 \otimes \dfrac{1}{\sqrt{2}}(|0_{\mathrm{L}}\rangle_2 - |1_{\mathrm{L}}\rangle_2) \to |0_{\mathrm{L}}\rangle_1 \otimes \dfrac{1}{\sqrt{2}}(|0_{\mathrm{L}}\rangle_2 - |1_{\mathrm{L}}\rangle_2) \\ |1_{\mathrm{L}}\rangle_1 \otimes \dfrac{1}{\sqrt{2}}(|0_{\mathrm{L}}\rangle_2 + |1_{\mathrm{L}}\rangle_2) \to |1_{\mathrm{L}}\rangle_1 \otimes \dfrac{1}{\sqrt{2}}(|0_{\mathrm{L}}\rangle_2 - |1_{\mathrm{L}}\rangle_2) \\ |1_{\mathrm{L}}\rangle_1 \otimes \dfrac{1}{\sqrt{2}}(|0_{\mathrm{L}}\rangle_2 - |1_{\mathrm{L}}\rangle_2) \to |1_{\mathrm{L}}\rangle_1 \otimes \dfrac{1}{\sqrt{2}}(|0_{\mathrm{L}}\rangle_2 + |1_{\mathrm{L}}\rangle_2) \end{cases} \tag{2.21}$$

となり，③ は，

$$\begin{cases} |0_{\mathrm{L}}\rangle_1 \otimes \dfrac{1}{\sqrt{2}}(|0_{\mathrm{L}}\rangle_2 + |1_{\mathrm{L}}\rangle_2) \to |0_{\mathrm{L}}\rangle_1 \otimes |0_{\mathrm{L}}\rangle_2 \\ |0_{\mathrm{L}}\rangle_1 \otimes \dfrac{1}{\sqrt{2}}(|0_{\mathrm{L}}\rangle_2 - |1_{\mathrm{L}}\rangle_2) \to |0_{\mathrm{L}}\rangle_1 \otimes |1_{\mathrm{L}}\rangle_2 \\ |1_{\mathrm{L}}\rangle_1 \otimes \dfrac{1}{\sqrt{2}}(|0_{\mathrm{L}}\rangle_2 - |1_{\mathrm{L}}\rangle_2) \to |1_{\mathrm{L}}\rangle_1 \otimes |1_{\mathrm{L}}\rangle_2 \\ |1_{\mathrm{L}}\rangle_1 \otimes \dfrac{1}{\sqrt{2}}(|0_{\mathrm{L}}\rangle_2 + |1_{\mathrm{L}}\rangle_2) \to |1_{\mathrm{L}}\rangle_1 \otimes |0_{\mathrm{L}}\rangle_2 \end{cases} \tag{2.22}$$

となる．したがって，①–③ を合わせると，式 (2.15) で示した制御ノットゲートの動作をしていることがわかる．

これらを念頭に図 2.6 を見てみよう．まず ① は，モード 2 と 3 とハーフビー

ムスプリッターにより，式 (2.19) のように達成される．次に光カーハミルトニアンによるユニタリー変換，つまり式 (2.17) により，モード 1 が単一光子状態 $|1\rangle_1$ でかつモード 2 も単一光子状態 $|1\rangle_2$ のときだけ符号が反転することにより，② が達成される．③ は式 (2.19) の逆変換はそれ自身であることから達成される．したがって，全体で制御ノットゲートの動作が行われたことになる．

このように，ビームスプリッターのハミルトニアンと光カー効果のハミルトニアンを用いると，制御ノットゲートとアダマールゲートの動作をさせることができる．

2.3 基本的量子情報処理としての量子テレポーテーション

2.3.1 量子ビットのテレポーテーション

量子テレポーテーションという言葉を聞いて，読者はどのように思うだろうか．大多数は SF 小説の中での空想の産物と思うだろう．テレポーテーションという言葉はかなり以前から SF 小説の中ではポピュラーな存在であり，テレポーテーションと聞いてどういうことか想像できない人はいないであろう．宇宙船の中からどこかの星の上に瞬時に移動するという「あれ」である．

しかし，ここで挙げる量子テレポーテーションは，SF 小説で語られている一種の「オカルト」とは異なる．量子テレポーテーションは量子状態 (量子情報，簡単な例は波動関数) を伝送することであるが，古典的状態 (古典情報) を伝送する従来の情報通信と本質的に異なるため，敢えてそう名付けられている．その根本理由は，「任意の量子状態はコピーできない」という要請である．通常の情報通信を考えてみよう．通常の情報通信においては，情報の送信者の意図により，受信者に送った情報と同じものを手元に残すことができる．例えば，ファックスを思い浮かべれば簡単であろう．ファックスではオリジナルは送信者の手元に残り，コピーが受信者の手元に現れる．また，電子メールでも送った内容のコピーを手元に残すことができる．ところが，量子状態の伝送時にこのようなことが可能となると，送信者と受信者双方に同じ量子状態が出現してしまうことになる．つまり，量子状態がコピーされたことになってしまう．したがって，「任意の量子状態はコピーできない」という根本原理に矛盾せず，量子状態を伝送するためには，送信者側で必ずオリジナルの状態が「消滅」し，受信者側で再び現れるということが必要になる．この送信者側での「消滅」と受信者側での「再生」の様子が，SF 小説のテレポーテーションと似ていたため，このようなネーミングになったのである．つまり，テレポーテーションという言葉は「本物」はつねに 1 つしか存在しないということを表しているのである．

量子テレポーテーションを別の角度から眺めてみる．つまり，古典的方法のみでは量子状態を伝送できない「根本理由」を別の言い方で表現する．それは，「直接測定により任意の量子状態を決定することはできない」ということである．もし，それが可能であれば，送りたい状態を直接測定し，その結果を受信

者側に送れば，それに基づいて送りたい状態を受信者側で再生できるから，量子テレポーテーションなどやらなくても済んでしまうのである．もちろん，直接測定により量子状態が決まれば，コピーも自由自在である．そういう意味では，前段落の「根本理由」と同じことをいっている．量子テレポーテーションでは，後述するベル測定という方法で，この障害を回避している．平たくいうと，そのベル測定では，送りたい量子状態を直接測定するのではなく，別のものと混ぜて測定し，送りたい状態のことは一切わからないようにして，この障害を回避している．

図 2.7 に 1993 年ベネットらにより提案された量子ビットのテレポーテーション[11)]の量子回路[12)]を示す．前節で説明した制御ノットゲートとアダマールゲー

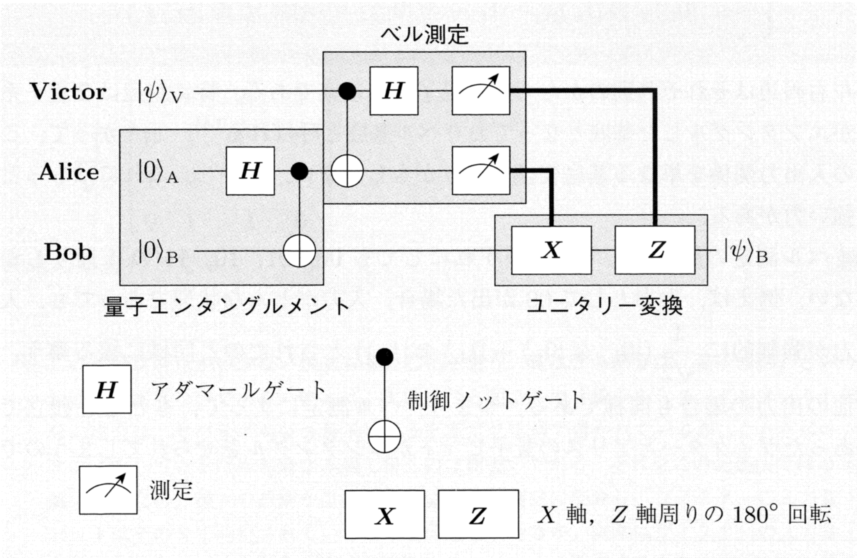


図 2.7　量子ビットのテレポーテーションの量子回路
ヴィクターの (生成した) 状態 $|\psi\rangle$ がアリスに渡され，
(空間的に離れた) ボブのところで再生されている．

---

11) C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1895 (1993).

12) 量子論理ゲートを組合せたものを量子回路と呼ぶ．

トが含まれている．この量子回路には重要な部分が 2 つある．

1 つは制御ノットゲートとアダマールゲートと測定[13)]で構成されたベル測定として囲われている部分である．この部分での入出力関係は次のようになっている．

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{V}} \otimes |0_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{A}} + |1_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{V}} \otimes |1_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{A}}) \rightarrow |0_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{V}} \otimes |0_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{A}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{V}} \otimes |0_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{A}} - |1_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{V}} \otimes |1_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{A}}) \rightarrow |1_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{V}} \otimes |0_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{A}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{V}} \otimes |1_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{A}} + |1_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{V}} \otimes |0_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{A}}) \rightarrow |0_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{V}} \otimes |1_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{A}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{V}} \otimes |1_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{A}} - |1_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{V}} \otimes |0_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{A}}) \rightarrow |1_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{V}} \otimes |1_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{A}} \end{cases} \tag{2.23}$$

左右両辺はそれぞれ別のかたちの 2 量子系の基底である．特に左辺は 2 量子系がエンタングルした基底となっておりベル基底と呼ばれる[14)]．したがって，この入出力関係を単なる基底変換と思うかもしれない．しかし，これにはもっと強い力がある．

ベル測定の出力としては，いずれにしても 00，01，10，11 の 4 通りしかない．例えば，出力として 00 が出た場合，入力がどんな状態であっても，入力が強制的に $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0_{\mathrm{L}}\rangle \otimes |0_{\mathrm{L}}\rangle + |1_{\mathrm{L}}\rangle \otimes |1_{\mathrm{L}}\rangle)$ とされたのと同様に振る舞う．他の出力の場合も同様である．つまり，ベル測定によって，もともと独立であったヴィクターとアリスの量子ビットがエンタングルさせられてしまうので

---

13) $|0_{\mathrm{L}}\rangle$ か $|1_{\mathrm{L}}\rangle$ であるかを明らかにし，$|0_{\mathrm{L}}\rangle$ であったら 0 を出力し，$|1_{\mathrm{L}}\rangle$ であったら 1 を出力する．

14) 3 番目の関係式の左辺は，式 (1.193) で示したエンタングルした状態である．また，

$$\begin{cases} \left|\phi^{(\pm)}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_{\mathrm{L}}\rangle \otimes |0_{\mathrm{L}}\rangle \pm |1_{\mathrm{L}}\rangle \otimes |1_{\mathrm{L}}\rangle) \\ \left|\psi^{(\pm)}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_{\mathrm{L}}\rangle \otimes |1_{\mathrm{L}}\rangle \pm |1_{\mathrm{L}}\rangle \otimes |0_{\mathrm{L}}\rangle) \end{cases} \tag{2.24}$$

とすることが多い．

ある[15)]．エンタングルの仕方は，ベル測定結果に依存して 4 通りあるのは式 (2.23) から明らかである．ベル測定には，もともと他人であった 2 人を強制的に「結婚」させる力があるのである[16)]．

例題 2.2

式 (2.23) のような動作をするベル測定を，計算基底[17)]を用いた行列で表示せよ．

【解答】 式 (2.23) で示したユニタリー変換の逆変換の行列は，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

であるから，この逆行列が求める行列である．したがって，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

が求める行列となる． ■

---

15) この部分に合点がいかない読者も多いことと思う．実はこの部分は「量子回路」という記述法の限界なのである．例えば，次に述べる図 2.7 の「量子エンタングルメント」部分の出力は，セパラブルな 2 量子ビットを表す 2 本線で書かれているが，これらはエンタングルしているため本来 2 本線で書くのは間違いである．それをこの記述法では 2 本線で書くため，種々の誤解が生じる．同様にベル測定の部分も，ヴィクターの入力量子ビットはそのまま測定されているような印象を与えるが，実際はヴィクターの入力量子ビットとは全くの別物を測定している．ここでは，ベル測定全体でベル基底への射影を行っているとしか表現しようがないが，「量子回路」という記述法では図 2.7 のようになってしまい，種々の誤解の元となっている．しかし，その点に注意すれば，量子回路の記述法は非常に便利である．

16) ここで，もともとアリスとボブがエンタングルしていた場合，ベル測定により新たにヴィクターとアリスの間で「関係」(エンタングルメント) を結ぶことになるから，「人間関係」としてはかなり複雑になる．つまり，3 者間エンタングルメントが形成されている．

17) 第 2 章の章末問題 2 参照．

例題 2.3

式 (2.23) のような動作をするベル測定が，図 2.7 に示されたように制御ノットゲートとアダマールゲートで構成できることを

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{CNOT}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

を用いて確認せよ．ただし，$\boldsymbol{M}_{\mathrm{CNOT}}$ は計算基底における制御ノットの行列，$\boldsymbol{H}$ はアダマールゲートの行列を表し，第 1 量子ビットのみをアダマール変換する計算基底での行列は $\boldsymbol{H} \otimes \boldsymbol{I}$ である．

$$\boldsymbol{H} \otimes \boldsymbol{I} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

【解答】 図 2.7 の量子回路に相当する行列は $(\boldsymbol{H} \otimes \boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{M}_{\mathrm{CNOT}}$ だから，これを計算すると

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{H} \otimes \boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{M}_{\mathrm{CNOT}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となり，前問と同じ行列になる． ■

もう 1 つの重要な部分は量子エンタングルメントとして囲われている部分で，$|0_{\mathrm{L}}\rangle \otimes |0_{\mathrm{L}}\rangle$ が，アダマールゲートと制御ノットゲートで構成された量子回路に入力している．この部分の入出力は，

$$|0_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{B}} \to \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{B}} + |1_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |1_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{B}} \right) \tag{2.26}$$

であり，量子エンタングルメントを生成している．

テレポーテーションのプロセスとしては，最後にベル測定結果によって，ボブの量子ビットにユニタリー変換を行う．ユニタリー変換は $\hat{X}$，$\hat{Z}$ の 2 種類で (恒等変換 $\hat{I}$ を含めれば 3 種類)，ベル測定結果に応じて次のような変換をする．

$$00 : \hat{I}, \quad 01 : \hat{X}, \quad 10 : \hat{Z}, \quad 11 : \hat{X}\hat{Z}$$

ここで，$\hat{X}$ は次のような変換である．

$$\hat{X}|0_{\mathrm{L}}\rangle = |1_{\mathrm{L}}\rangle, \quad \hat{X}|1_{\mathrm{L}}\rangle = |0_{\mathrm{L}}\rangle \tag{2.27}$$

また，$\hat{Z}$ は次のような変換である．

$$\hat{Z}|0_{\mathrm{L}}\rangle = |0_{\mathrm{L}}\rangle, \quad \hat{Z}|1_{\mathrm{L}}\rangle = -|1_{\mathrm{L}}\rangle \tag{2.28}$$

この結果，入力状態 $|\psi\rangle$ がボブで再現される[18)]．

以上が量子ビットテレポーテーションの量子回路である．ここまで説明してくると，量子テレポーテーションに量子情報科学あるいは量子情報処理のエッセンスが詰まっている様子がよくわかる．エッセンスとは量子情報科学流にいうと，量子エンタングルメントの代表的な生成法 (図 2.7 の量子エンタングルメントおよびベル測定の部分) が含まれていること，量子情報処理流にいえば，制御ノットと 1 量子ビットユニタリー変換が含まれていることである．ここで，制御ノットと 1 量子ビットユニタリー変換が自由に使えれば，ユニバーサルな量子コンピュータを作れることが知られている．量子テレポーテーション回路の重要さがわかる．

量子ビットのテレポーテーションの様子を少し別の角度から見てみよう．量子テレポーテーションとは，図 2.8 のような量子情報通信「プロトコル」であるともいえる．まず，(量子) 情報の送り手であるアリスと受け手であるボブの間であらかじめ量子エンタングルメントを共有する．アリスは送りたい状態とエンタングルした量子系の片方との間でベル測定をし，その結果をボブに送る．ボブはその結果に基づいて自分のところにあるエンタングルした量子系の片方をユニタリー変換し，送りたかった状態を再現する．

以上の様子を式で表現する．まず，ベル測定前の全体の状態は，送りたい状

18) 詳しくは後で述べる．

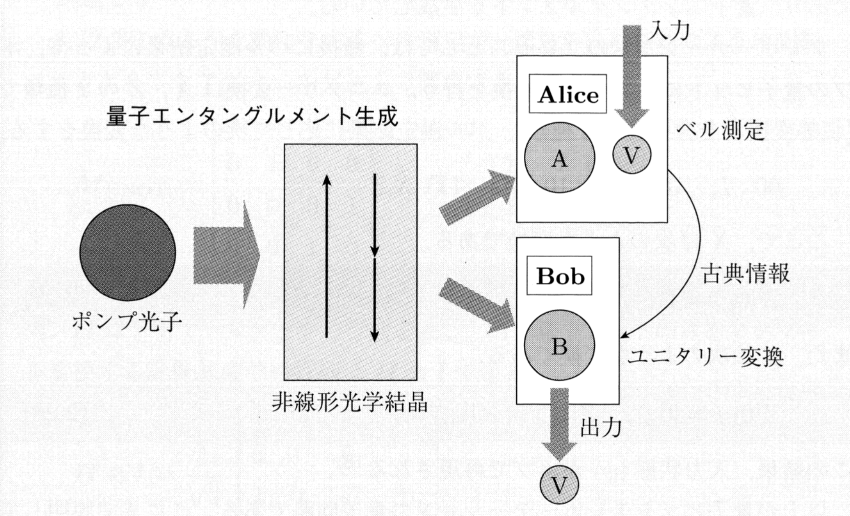


図 2.8 量子光学的に行う量子テレポーテーションの概念図

態 (量子ビット) とエンタングルした量子対 (EPR ペア) の直積の状態である．エンタングルした量子対の状態としては式 (2.24) で示した $\left|\psi^{(\pm)}\right\rangle$，$\left|\phi^{(\pm)}\right\rangle$ の 4 つ (ベル基底) があるが，ここでは $\left|\phi^{(+)}\right\rangle$ とする[19)]．したがって，ベル測定前の全体の状態は $\left(c_0|0_\mathrm{L}\rangle_\mathrm{V}+c_1|1_\mathrm{L}\rangle_\mathrm{V}\right)\otimes\left|\phi^{(+)}\right\rangle_\mathrm{AB}$ となるが，これは以下のように式変形できる．

$$
\begin{aligned}
&\left(c_0|0_\mathrm{L}\rangle_\mathrm{V}+c_1|1_\mathrm{L}\rangle_\mathrm{V}\right)\otimes\left|\phi^{(+)}\right\rangle_\mathrm{AB}\\
&\quad=\frac{1}{2}\Big[\left|\phi^{(+)}\right\rangle_\mathrm{VA}\otimes\left(c_0\left|0_\mathrm{L}\right\rangle_\mathrm{B}+c_1\left|1_\mathrm{L}\right\rangle_\mathrm{B}\right)\\
&\qquad+\left|\phi^{(-)}\right\rangle_\mathrm{VA}\otimes\left(c_0\left|0_\mathrm{L}\right\rangle_\mathrm{B}-c_1\left|1_\mathrm{L}\right\rangle_\mathrm{B}\right)\\
&\qquad+\left|\psi^{(+)}\right\rangle_\mathrm{VA}\otimes\left(c_0\left|1_\mathrm{L}\right\rangle_\mathrm{B}+c_1\left|0_\mathrm{L}\right\rangle_\mathrm{B}\right)\\
&\qquad+\left|\psi^{(-)}\right\rangle_\mathrm{VA}\otimes\left(c_0\left|1_\mathrm{L}\right\rangle_\mathrm{B}-c_1\left|0_\mathrm{L}\right\rangle_\mathrm{B}\right)\Big]
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

19) 過去に行われた実験では $\left|\psi^{(-)}\right\rangle$ を用いることが多いようである．しかし，4 つのベル基底のうちどれを使っても同じ議論ができるので，ここでは図 2.7 に合わせて $\left|\phi^{(+)}\right\rangle$ を用いた．

ベル測定とはベル基底への射影であるから，ベル測定後のボブの状態は，

$$c_0\,|0_\mathrm{L}\rangle_\mathrm{B}+c_1\,|1_\mathrm{L}\rangle_\mathrm{B}\,,\quad c_0\,|0_\mathrm{L}\rangle_\mathrm{B}-c_1\,|1_\mathrm{L}\rangle_\mathrm{B}$$
$$c_0\,|1_\mathrm{L}\rangle_\mathrm{B}+c_1\,|0_\mathrm{L}\rangle_\mathrm{B}\,,\quad c_0\,|1_\mathrm{L}\rangle_\mathrm{B}-c_1\,|0_\mathrm{L}\rangle_\mathrm{B}$$

のどれかに「収縮」する．ベル測定をしただけで c_0，c_1 の情報を送っていないのにボブのところにそれが現れた格好になっている．ただし，これは見かけに過ぎない．というのも，ベル測定前後でボブで測定を行っても 0，1 を得る確率に変化はない．つまり，**ベル測定だけでは情報は伝わっていない．**

量子テレポーテーションを完成させる，つまり送りたかった量子 (状態) がボブのところに現れるためには，アリスはベル測定の結果をボブに送らなければならない．ベル測定直後にボブのところに現れた状態は，測定結果に基づくユニタリー変換で以下のように $c_0\,|0_\mathrm{L}\rangle_\mathrm{B}+c_1\,|1_\mathrm{L}\rangle_\mathrm{B}$ へ変換できる．

$$\begin{cases} 00: & \hat{I}\big(c_0\,|0_\mathrm{L}\rangle_\mathrm{B}+c_1\,|1_\mathrm{L}\rangle_\mathrm{B}\big)=c_0\,|0_\mathrm{L}\rangle_\mathrm{B}+c_1\,|1_\mathrm{L}\rangle_\mathrm{B} \\ 10: & \hat{Z}\big(c_0\,|0_\mathrm{L}\rangle_\mathrm{B}-c_1\,|1_\mathrm{L}\rangle_\mathrm{B}\big)=c_0\,|0_\mathrm{L}\rangle_\mathrm{B}+c_1\,|1_\mathrm{L}\rangle_\mathrm{B} \\ 01: & \hat{X}\big(c_0\,|1_\mathrm{L}\rangle_\mathrm{B}+c_1\,|0_\mathrm{L}\rangle_\mathrm{B}\big)=c_0\,|0_\mathrm{L}\rangle_\mathrm{B}+c_1\,|1_\mathrm{L}\rangle_\mathrm{B} \\ 11: & \hat{X}\hat{Z}\big(c_0\,|1_\mathrm{L}\rangle_\mathrm{B}-c_1\,|0_\mathrm{L}\rangle_\mathrm{B}\big)=c_0\,|0_\mathrm{L}\rangle_\mathrm{B}+c_1\,|1_\mathrm{L}\rangle_\mathrm{B} \end{cases} \tag{2.30}$$

したがって，ボブのところで入力状態が再現されることになる．

2.3.2 ザイリンガーグループの実験

量子ビットのテレポーテーション実験を実際に試みたのは，当時インスブルック大学にあったザイリンガーのグループである[20]．彼らは

$$|0_\mathrm{L}\rangle=|0\rangle_\updownarrow\otimes|1\rangle_\leftrightarrow=|\leftrightarrow\rangle,\quad |1_\mathrm{L}\rangle=|1\rangle_\updownarrow\otimes|0\rangle_\leftrightarrow=|\updownarrow\rangle$$

として量子ビットを表現した．ここで，$\leftrightarrow$ は水平偏光のモードを表し，$\updownarrow$ は垂直偏光のモードを表している．

エンタングルした光子対は，図 2.9 に示したように，2 次の非線形光学過程である偏光非縮退パラメトリック過程[21]を 2 つ用い，これらの出力を適当な位相関係で偏光ビームスプリッターを用いて重ね合わせることにより生成される[22]．

[20] D. Bouwmeester *et al.*, *Nature* **390**, 575 (1997).

[21] 縮退パラメトリック過程がタイプ I の位相整合を用いるのに対し，ここではタイプ II の位相整合を用いる．

[22] P. G. Kwiat, *Phys. Rev. A* **49**, 3209 (1994).

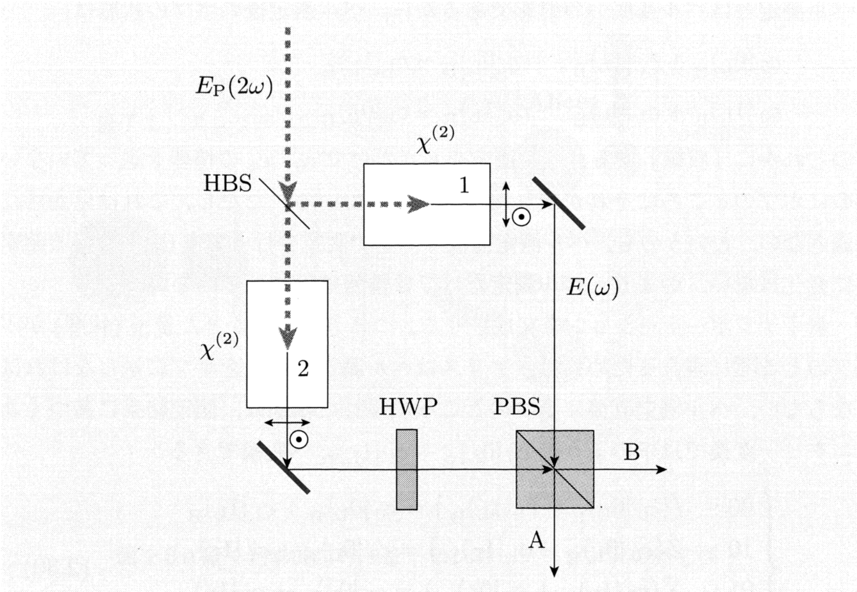


図 2.9 エンタングルした光子対の生成法
HBS：ポンプ光の波長でのハーフビームスプリッター，PBS：変換後の波長での偏光ビームスプリッター (水平偏光は完全透過，垂直偏光は完全反射)，HWP：半波長板．

偏光非縮退パラメトリック過程のハミルトニアンは，式 (1.138) に示した縮退パラメトリック過程のハミルトニアンにならって次のように書ける．

$$\hat{H} \propto i(\hat{a}_{\mathrm{P}}^{\dagger}\hat{a}_{\updownarrow}\hat{a}_{\leftrightarrow} - \hat{a}_{\mathrm{P}}\hat{a}_{\updownarrow}^{\dagger}\hat{a}_{\leftrightarrow}^{\dagger}) \tag{2.31}$$

ここでは，式 (1.138) とは異なり，ポンプ光 (波長が半分の光) も量子化してあり，その消滅演算子を $\hat{a}_{\mathrm{P}}$ で表している．このハミルトニアンは直感的には，ポンプ光子 1 個が，水平，垂直偏光の光子それぞれ 1 個に分裂しているとも考えられる．ポンプ光まで量子化する理由は，以下で示すように，これがこの方法の本質だからである．

このハミルトニアンによるユニタリー変換 $e^{s(\hat{a}_{\mathrm{P}}^{\dagger}\hat{a}_{\updownarrow}\hat{a}_{\leftrightarrow} - \hat{a}_{\mathrm{P}}\hat{a}_{\updownarrow}^{\dagger}\hat{a}_{\leftrightarrow}^{\dagger})}$ (s：適当な実数) は，初期状態が $|1\rangle_{\mathrm{P}} \otimes |0\rangle_{\updownarrow} \otimes |0\rangle_{\leftrightarrow}$ のとき，次式の $|\mathrm{NOPA}\rangle$ を生成する．

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{NOPA}\rangle &= e^{s(\hat{a}_{\mathrm{P}}^{\dagger}\hat{a}_{\updownarrow}\hat{a}_{\leftrightarrow}-\hat{a}_{\mathrm{P}}\hat{a}_{\updownarrow}^{\dagger}\hat{a}_{\leftrightarrow}^{\dagger})}|1\rangle_{\mathrm{P}}\otimes|0\rangle_{\updownarrow}\otimes|0\rangle_{\leftrightarrow} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{n!}(\hat{a}_{\mathrm{P}}^{\dagger}\hat{a}_{\updownarrow}\hat{a}_{\leftrightarrow}-\hat{a}_{\mathrm{P}}\hat{a}_{\updownarrow}^{\dagger}\hat{a}_{\leftrightarrow}^{\dagger})^n|1\rangle_{\mathrm{P}}\otimes|0\rangle_{\updownarrow}\otimes|0\rangle_{\leftrightarrow} \\
&= \cos(\sqrt{2}s)|1\rangle_{\mathrm{P}}\otimes|0\rangle_{\updownarrow}\otimes|0\rangle_{\leftrightarrow}-\sin(\sqrt{2}s)|0\rangle_{\mathrm{P}}\otimes|1\rangle_{\updownarrow}\otimes|1\rangle_{\leftrightarrow}
\end{aligned} \tag{2.32}
$$

この式の意味は，先ほど述べたように，ポンプ光子 1 個が水平，垂直偏光の光子それぞれ 1 個に分裂しているということであり，ポンプ光強度 (あるいは非線形光学定数) に比例して s が大きくなり分裂の確率が高くなるということである[23]．

仮に図 2.9 のポンプ光 $E_{\mathrm{P}}(2\omega)$ として単一光子状態 $|1\rangle_{\mathrm{P}}$ が入射したとする．ハーフビームスプリッター後のポンプ光の状態 $|pump\rangle_{12}$ は，

$$
|pump\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_{1\mathrm{P}}\otimes|1\rangle_{2\mathrm{P}}+|1\rangle_{1\mathrm{P}}\otimes|0\rangle_{2\mathrm{P}}) \tag{2.33}
$$

である．ただし，添え字 1P，2P は，ポンプ光における図 2.9 に示したモード 1，2 を示している．この式の意味は明らかで，モード 1，2 にポンプ光子が存在する確率がそれぞれ 1/2 であることを示している．偏光非縮退パラメトリック過程の系の状態 $|\mathrm{NOPA2}\rangle_{12}$ は，式 (2.32)，(2.33) を組合せれば，次式のように書ける．

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{NOPA2}\rangle_{12} = &\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_{1\mathrm{P}}\otimes|0\rangle_{1\updownarrow}\otimes|0\rangle_{1\leftrightarrow} \\
&\otimes\big[\cos(\sqrt{2}s)|1\rangle_{2\mathrm{P}}\otimes|0\rangle_{2\updownarrow}\otimes|0\rangle_{2\leftrightarrow} \\
&\quad -\sin(\sqrt{2}s)|0\rangle_{2\mathrm{P}}\otimes|1\rangle_{2\updownarrow}\otimes|1\rangle_{2\leftrightarrow}\big] \\
&+\frac{1}{\sqrt{2}}\big[\cos(\sqrt{2}s)|1\rangle_{1\mathrm{P}}\otimes|0\rangle_{1\updownarrow}\otimes|0\rangle_{1\leftrightarrow} \\
&\quad -\sin(\sqrt{2}s)|0\rangle_{1\mathrm{P}}\otimes|1\rangle_{1\updownarrow}\otimes|1\rangle_{1\leftrightarrow}\big] \\
&\quad \otimes|0\rangle_{2\mathrm{P}}\otimes|0\rangle_{2\updownarrow}\otimes|0\rangle_{2\leftrightarrow}
\end{aligned} \tag{2.34}
$$

ここで，ポンプ光の状態を無視すると，この状態は次式のように書ける．

---

[23] もちろん，分裂の確率は $\left|\sin(\sqrt{2}s)\right|^2$ に比例するから，s に比例しているわけではないが，通常の実験の範囲内では s は十分小さいから，s が大きくなると分裂の確率も高くなる．

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{NOPA2}\rangle_{12} = \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}s)|0\rangle_{1\updownarrow} \otimes |0\rangle_{1\leftrightarrow} \otimes |0\rangle_{2\updownarrow} \otimes |0\rangle_{2\leftrightarrow} \\
-\frac{\sin(\sqrt{2}s)}{\sqrt{2}}|0\rangle_{1\updownarrow} \otimes |0\rangle_{1\leftrightarrow} \otimes |1\rangle_{2\updownarrow} \otimes |1\rangle_{2\leftrightarrow} \\
-\frac{\sin(\sqrt{2}s)}{\sqrt{2}}|1\rangle_{1\updownarrow} \otimes |1\rangle_{1\leftrightarrow} \otimes |0\rangle_{2\updownarrow} \otimes |0\rangle_{2\leftrightarrow}
\end{aligned} \tag{2.35}
$$

次に，この状態が図 2.9 の偏光ビームスプリッター通過後の状態を記述する．偏光ビームスプリッターでは水平偏光を完全に透過し，垂直偏光を完全に反射するから，通過後のモードの対応は，

$$
\begin{cases}
1\updownarrow \;\; \to \mathrm{B}\updownarrow \\
1\leftrightarrow \to \mathrm{A}\leftrightarrow \\
2\updownarrow \;\; \to \mathrm{A}\updownarrow \\
2\leftrightarrow \to \mathrm{B}\leftrightarrow
\end{cases} \tag{2.36}
$$

となっているから，通過後の状態 $|\mathrm{NOPA2}\rangle_{\mathrm{AB}}$ はモードの順番を適当に入れ替えて次式のように書ける．

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{NOPA2}\rangle_{\mathrm{AB}} = \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}s)|0\rangle_{\mathrm{A}\updownarrow} \otimes |0\rangle_{\mathrm{A}\leftrightarrow} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}\updownarrow} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}\leftrightarrow} \\
-\frac{\sin(\sqrt{2}s)}{\sqrt{2}}|1\rangle_{\mathrm{A}\updownarrow} \otimes |0\rangle_{\mathrm{A}\leftrightarrow} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}\updownarrow} \otimes |1\rangle_{\mathrm{B}\leftrightarrow} \\
-\frac{\sin(\sqrt{2}s)}{\sqrt{2}}|0\rangle_{\mathrm{A}\updownarrow} \otimes |1\rangle_{\mathrm{A}\leftrightarrow} \otimes |1\rangle_{\mathrm{B}\updownarrow} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}\leftrightarrow}
\end{aligned} \tag{2.37}
$$

ここで，$|0\rangle_{\mathrm{A}\updownarrow} \otimes |0\rangle_{\mathrm{A}\leftrightarrow} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}\updownarrow} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}\leftrightarrow}$ を $|vac\rangle$ と書き，$|1\rangle_{\mathrm{A}\updownarrow} \otimes |0\rangle_{\mathrm{A}\leftrightarrow} = |\updownarrow\rangle_{\mathrm{A}}$，$|0\rangle_{\mathrm{A}\updownarrow} \otimes |1\rangle_{\mathrm{A}\leftrightarrow} = |\leftrightarrow\rangle_{\mathrm{A}}$ のように書けば，最終的に，

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{NOPA2}\rangle_{\mathrm{AB}} = \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}s)|vac\rangle \\
-\frac{\sin(\sqrt{2}s)}{\sqrt{2}}\left[\,|\updownarrow\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |\leftrightarrow\rangle_{\mathrm{B}} + |\leftrightarrow\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |\updownarrow\rangle_{\mathrm{B}}\,\right]
\end{aligned} \tag{2.38}
$$

となる．実験的に $|vac\rangle$ を排除し，$|0_{\mathrm{L}}\rangle = |\leftrightarrow\rangle$，$|1_{\mathrm{L}}\rangle = |\updownarrow\rangle$ とすれば，得られた状態は，

$$\left|\psi^{(+)}\right\rangle_{\mathrm{AB}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{B}} + |0_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |1_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{B}}\right) \tag{2.39}$$

となり，ベル基底の1つとなっている．また，図2.9に示された半波長板を回すことにより，式(2.36)の対応関係および符号は任意に変えることができるので，このセットアップで全てのベル基底状態を生成することができる[24)]．さらに，実際の実験では1つの結晶を用いて，同様のことを行っているが，原理的には同じである．

ここまで書くとよいことばかりのようだが，この方法にはいくつかの大きな問題点がある．まず，ポンプ光の状態として，単一光子状態 $|1\rangle_{\mathrm{P}}$ を用意することは現時点では不可能である．我々が用意できるのは非常に弱いコヒーレント状態であるが，式(1.125)から明らかなように，光子数状態の重ね合わせになっており，単一光子状態とは大きく異なる．非常に弱いコヒーレント状態では大半は真空状態 $|0\rangle$ であり，これをポンプ光に用いても，ベル基底状態を生成できる確率は非常に低い．逆に生成確率を上げようとしてポンプ光を強くしても，ポンプ光の中に複数光子状態の割合が増えてしまい，やはりベル基底状態からは遠ざかってしまう．したがって，基本的に生成確率は非常に低い．もう1つの問題点は，何らかの方法で $|vac\rangle$ を取り除かなければならないことである．手っ取り早いのは，測定して光子が存在した場合のみ採用ということになるのだが，直接測定では状態が壊れてしまい，折角生成した状態を使うことができない．うまく工夫してそれを免れても，条件付きでしか状態を生成できない．もともと生成確率が低い上に条件付きとなると，さらに生成確率は低下してしまう．

このような問題点を抱えながらも，ザイリンガーのグループはこの方式で生成したベル基底状態を利用した．彼らの実験系の概念図を図2.10に示す．この実験では2組のベル基底状態を生成する．1組(A–B)はアリスとボブが共有し，テレポーテーションのリソースとして用い，もう1組(V1–V2)はテレポートされる単一光子状態を生成するために用いる．テレポーテーションのリソースとして用いられるベル基底状態としては4つのうちのどれを用いてもよいのであるが，彼らの実験では，$\left|\psi^{(-)}\right\rangle_{\mathrm{AB}}$ を用いている．したがって，テレポーテー

---

24) 4つのベル基底状態を総称してEPRペアと呼ぶことがある．

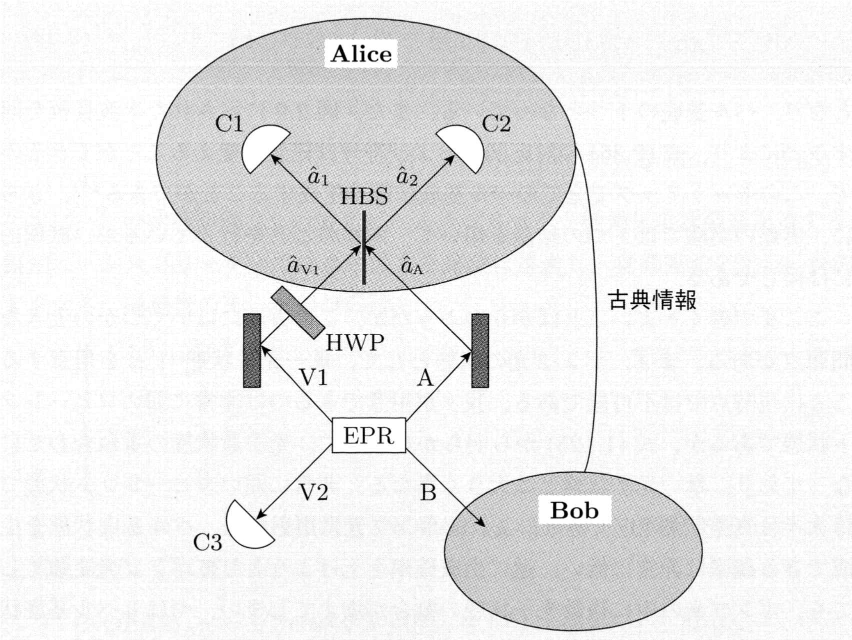


図 2.10　ザイリンガーグループのテレポーテーション実験概念図
EPR：ベル基底状態生成源，C1–C3：フォトンカウンター，
HBS：ハーフビームスプリッター，HWP：半波長板．

ションの様子は式 (2.29) と少し異なり，次式のようになる．

$$
\begin{aligned}
&\left(c_0|0_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{V}} + c_1|1_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{V}}\right) \otimes \left|\psi^{(-)}\right\rangle_{\mathrm{AB}} \\
&\quad = \frac{1}{2}\Big[\left|\psi^{(-)}\right\rangle_{\mathrm{VA}} \otimes \left(-c_0\,|0_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{B}} - c_1\,|1_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{B}}\right) \\
&\qquad + \left|\psi^{(+)}\right\rangle_{\mathrm{VA}} \otimes \left(-c_0\,|0_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{B}} + c_1\,|1_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{B}}\right) \\
&\qquad + \left|\phi^{(-)}\right\rangle_{\mathrm{VA}} \otimes \left(c_0\,|1_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{B}} + c_1\,|0_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{B}}\right) \\
&\qquad + \left|\phi^{(+)}\right\rangle_{\mathrm{VA}} \otimes \left(c_0\,|1_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{B}} - c_1\,|0_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{B}}\right)\Big]
\end{aligned} \tag{2.40}
$$

もちろん，ベル測定後のユニタリー変換等は同じような理屈で行うことができる．また，実験では理論になかった 2 組目のベル基底状態 (V1–V2) を用いる．これは，入力光子 (V1) の存在保証に用いられる．実験の進め方は以下の通り

である．

テレポートしたい偏光状態の光子 (V1) を生成するために，適当に半波長板を回す．また，テレポートしたい光子の存在を保証するために V2 をフォトンカウンター (C3) に入力させる．つまり，フォトンカウンター (C3) で光子の存在を検知したら，V1 にも光子が存在することになる．ただし，フォトンカウンター (C3) は偏光については何も測定しない．ただ単に光子の有無を判別するだけである．

ベル測定はモード A とモード V1 をハーフビームスプリッターで合波し，フォトンカウンター C1 と C2 が同時に光子を検出したら，系の状態ベクトルが $\left|\psi^{(-)}\right\rangle_{\mathrm{VA}}$ に射影されることを用いる[25]．C1，C2 の同時検出は消滅演算子 $\hat{a}_1$，$\hat{a}_2$ により真空が生成すると考えることができるから，$\langle 0|\hat{a}_1^j\hat{a}_2^k$ と書くことができる．ただし，j，k は偏光状態を表し，$j,k=\updownarrow,\leftrightarrow$ である．また，ハーフビームスプリッターでは，

$$\begin{cases} \hat{a}_1^j = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_{\mathrm{V1}}^j + \hat{a}_{\mathrm{A}}^j) \\ \hat{a}_2^j = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_{\mathrm{V1}}^j - \hat{a}_{\mathrm{A}}^j) \end{cases} \tag{2.41}$$

となっているから，同時検出は，

$$\langle 0|\,\hat{a}_1^j\hat{a}_2^k = \frac{1}{2}\,\langle 0|\,(\hat{a}_{\mathrm{V1}}^j\hat{a}_{\mathrm{V1}}^k + \hat{a}_{\mathrm{A}}^j\hat{a}_{\mathrm{V1}}^k - \hat{a}_{\mathrm{V1}}^j\hat{a}_{\mathrm{A}}^k - \hat{a}_{\mathrm{A}}^j\hat{a}_{\mathrm{A}}^k) \tag{2.42}$$

となる．モード A，モード V1 に同時に 2 つ以上の光子が存在しなければ，$\hat{a}_{\mathrm{V1}}^j\hat{a}_{\mathrm{V1}}^k$，$\hat{a}_{\mathrm{A}}^j\hat{a}_{\mathrm{A}}^k$ は無視できるから，最終的に

$$\langle 0|\,\hat{a}_1^j\hat{a}_2^k = \begin{cases} \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ {}_{\mathrm{VA}}\left\langle\psi^{(-)}\right| & (j \neq k) \\ 0 & (j = k) \end{cases} \tag{2.43}$$

となる．ここで，$j=k$ の場合の 0 は自明であり，物理的にはありえないことであるから，C1，C2 の同時検出は ${}_{\mathrm{VA}}\left\langle\psi^{(-)}\right|$ と等価であるといえる．$j=k$ の場合の解釈は次のようなものである．

$j=k$ はモード V1 とモード A からの入力が同じ偏光の光子であることを意味するが，この場合干渉が起こるから，C1 と C2 に 1 つずつ光子が到達するこ

---

[25] モード A，モード V1 に同時に 2 つ以上の光子が存在しないときのみである．

とはありえない．つまり,「もともと何もない」としないとつじつまが合わない．逆に $j \neq k$ の場合，干渉は起こらず，ビームスプリッターではそれぞれの光子の同時透過または同時反射が起こり，その状態が $\left|\psi^{(-)}\right\rangle_{\mathrm{VA}}$ ということになる．

ここで注意しなければならないのは，式 (2.43) の導出で，モード A，モード V1 からの入力に同時に 2 つ以上の光子が存在しないと仮定したことである．後述するが，この仮定が，ザイリンガーらの実験の命取りとなっている．

以上より，条件付きではあるが，フォトンカウンター C1，C2，C3 の 3 つの同時検出により，アリスはベル測定を行い，その結果が $\left|\psi^{(-)}\right\rangle_{\mathrm{VA}}$ であったことがわかる．この瞬間，ボブの持つベル基底状態 (A–B) の片方の光子 B は，

$$-\left(c_0\left|\leftrightarrow\right\rangle_{\mathrm{B}} + c_1\left|\updownarrow\right\rangle_{\mathrm{B}}\right) = -\left(c_0\left|0_{\mathrm{L}}\right\rangle_{\mathrm{B}} + c_1\left|1_{\mathrm{L}}\right\rangle_{\mathrm{B}}\right)$$

に変化し，アリスから 3 つの検出器で同時検出をしたという知らせ (古典的情報) を受ければ，ボブは自分のところに量子情報が到達したことを知り，テレポーテーションが完了する．

ここで，$\left|\psi^{(-)}\right\rangle_{\mathrm{VA}}$ を用いる利点は，3 つの同時検出が達成されると，ボブの手許の状態が，全体の符号を除くと送りたかった状態になっていることである．ただし，この測定ではほかのベル基底の場合は区別できないため，起こる現象の 3/4 は捨てているともいえる．しかし，3 つの検出器で同時検出した場合は，かなり高い確率でテレポーテーションが成功する．ザイリンガーのグループではこれらを実験的に示した．

しかし，この実験には致命的な欠陥があった．欠陥とは，テレポーテーションの成功は出力された状態を測定して初めて明らかになるため，出力状態の測定は不可避で，その結果出力状態は破壊され，本来の意味での出力は存在しない点である．したがって，出力状態が存在しないので，これを量子情報処理の一部に使うことは不可能なのである．

この様子をもう少し定量的に見ていこう．この欠陥の根本原因は，前述の仮定「モード V1 とモード A からの入力に同時に 2 つ以上の光子は存在しない」が満たされていないのである．これは，現在のフォトンカウンティング法では，1 つの光子の検出と，同じタイミングで同じ検出器に飛来した 2 つ以上の光子の検出が同じ 1 カウントであり，これらを区別できないことによる．

もし，これらが区別できないとすると，先ほど説明したベル測定 (3 つの検出器による同時検出) は意味をなさなくなる．つまり，ベル測定とはならないということになる．(2.43) 式の導出において，$\hat{a}_{\mathrm{V1}}^{j}\hat{a}_{\mathrm{V1}}^{k}$ が無視できなくなるからである[26]．EPR ペア V1–V2 が同時に 2 組生成され，$\left|\psi^{(-)}\right\rangle_{\mathrm{AB}}$ が生成されなかった場合 (C3 に 2 個，C1，C2 にそれぞれ 1 個の光子) と，テレポーテーションの必要条件である $\left|\psi^{(-)}\right\rangle_{\mathrm{VA}}$ の状態と入力用単一光子状態の生成 (C1，C2，C3 に 1 個ずつの光子) が，両方とも 3 つの検出器の同時検出をもたらすのである．

EPR ペア V1–V2 が同時に 2 組生成される確率は無視できるほど小さいと考えるかもしれない．ところが，そうではないのである．C3 に 2 個，C1，C2 にそれぞれ 1 個の光子が検出される確率と，C1，C2，C3 に 1 個ずつの光子が検出される確率は等しいことが以下のように (煩雑ではあるが) 証明されている．

式 (2.38) の状態を図 2.9 の方法から得るためには，前述したようにポンプ光として単一光子状態 $|1\rangle_{\mathrm{P}}$ が必要である．しかし，これも前述したように，このようなポンプ光を使うことは現時点では不可能である．ザイリンガーらの実験でもポンプ光としては非常に弱いコヒーレント状態を用いている．その場合，図 2.9 の方法で生成される状態は，EPR ペアが 0 個，1 個，2 個の状態をそれぞれ $|0\rangle$，$\left|\psi^{(-)}\right\rangle$，$|\chi\rangle$ として，

$$A_0\,|0\rangle_{lm} + A_1\left|\psi^{(-)}\right\rangle_{lm} + A_2\,|\chi\rangle_{lm} + \cdots \tag{2.44}$$

と書ける (EPR ペアが 3 個以上は省略している)．ここで，$(l, m) = (\mathrm{V1}, \mathrm{V2})$ または (A, B)，$A_0 = \sqrt{1 - |\xi_{lm}|^2}$，$A_1 = \xi_{lm}$，$A_2 = \xi_{lm}^2$，$\xi_{lm}$ は (l, m) のカップリング定数 ($|\xi_{lm}| \ll 1$) である．したがって，式 (2.40) の $\left|\psi^{(-)}\right\rangle_{\mathrm{AB}}$ を式 (2.44) の状態 ($(l, m) = (\mathrm{A}, \mathrm{B})$) に置き換え，もう 1 つの V1–V2 で生じる状態，つまり式 (2.44) で $(l, m) = (\mathrm{V1}, \mathrm{V2})$ の場合との直積をとり，3 つの検出器の同時検出によりボブの許に生成される状態の密度演算子 $\hat{\rho}_{\mathrm{B}}$ を計算すると，ξ の最低次のものだけで次式のようになる．

$$\hat{\rho}_{\mathrm{B}} \propto |\xi_{\mathrm{V1\cdot V2}}|^4\,|0\rangle_{\mathrm{B}\,\mathrm{B}}\langle 0| + |\xi_{\mathrm{V1\cdot V2}}\xi_{\mathrm{AB}}|^2\,|\Psi\rangle_{\mathrm{B}\,\mathrm{B}}\langle\Psi| \tag{2.45}$$

---

[26] 話を簡単にするため $\hat{a}_{\mathrm{A}}^{j}\hat{a}_{\mathrm{A}}^{k}$ は無視する．これは，C3 での検出により V1 からの入力には少なくとも 1 つ以上の光子が存在するため，モード A からの入力に 2 つ以上の光子が存在しなくても，これ以降の議論の一般性は失われないからである．

ここで，$|\Psi\rangle_{\mathrm{B}}$ は送りたかった状態 $(c_0\,|\leftrightarrow\rangle_{\mathrm{B}}+c_1\,|\updownarrow\rangle_{\mathrm{B}})$ である．

式 (2.45) を説明すると，3 つの検出器の同時検出によって，2 つの状態の混ざった状態がボブのところに現れる．1 つは，EPR ペア V1–V2 が同時に 2 組生成され，$\left|\psi^{(-)}\right\rangle_{\mathrm{AB}}$ が生成されなかったため，ボブのところには何もこない「真空」$|0\rangle_{\mathrm{B}}$ であり (C3 に 2 個，C1，C2 にそれぞれ 1 個の光子が到達)，もう 1 つは，テレポーテーションの条件を満たした場合の，送りたかった状態 $|\Psi\rangle_{\mathrm{B}}$ である (C1，C2，C3 に 1 個ずつの光子が到達)．

ここで，ザイリンガーのグループの実験では，$|\xi_{\mathrm{V1\cdot V2}}|=|\xi_{\mathrm{AB}}|$ であるので，式から明らかなように,「真空」$|0\rangle_{\mathrm{B}}$ が現れる確率と $|\Psi\rangle_{\mathrm{B}}$ が現れる確率が同じになっている．つまり，C3 に 2 個，C1，C2 にそれぞれ 1 個の光子が検出される (EPR ペア V1–V2 が同時に 2 組生成される) 確率と，C1，C2，C3 に 1 個ずつの光子が検出される確率は等しくなっている．したがって，現れる状態の半分は「真空」$|0\rangle_{\mathrm{B}}$ となり，送りたかった情報の半分しか伝わっていないことになる．これは量子テレポーテーションなどやらずに，普通の「古典的」通信でも同じことができるといえる．

これを救うには，ボブが自分のところに「真空」以外のものが来ていることを状態を壊さずに確かめなければならないが，それは現在の技術では不可能である．もちろん，ボブが測定により,「真空」以外の状態が来ていることを知ることはできるが，ボブが測定を行ってしまうと，状態は破壊されるから，テレポーテーションを行ったことにはならない．ザイリンガーの実験では，ボブの状態を測定することにより真空でないことを確認してしまったので，彼らの実験は量子テレポーテーションとはなっていない (ボブの出力が破壊されている)．

かなり込み入った説明をしたが，要するに現時点ではこの方式で量子テレポーテーション実験に成功したグループはない．

2.3.3 連続量テレポーテーション

ここまで量子ビットのテレポーテーションについて述べてきた．この節では連続量

$$|\psi\rangle=\int dx\psi(x)|x\rangle$$

のテレポーテーションについて述べる．図 2.11 に連続量テレポーテーションの量子回路を示す．一見すると図 2.7 の量子ビットのテレポーテーションと全く

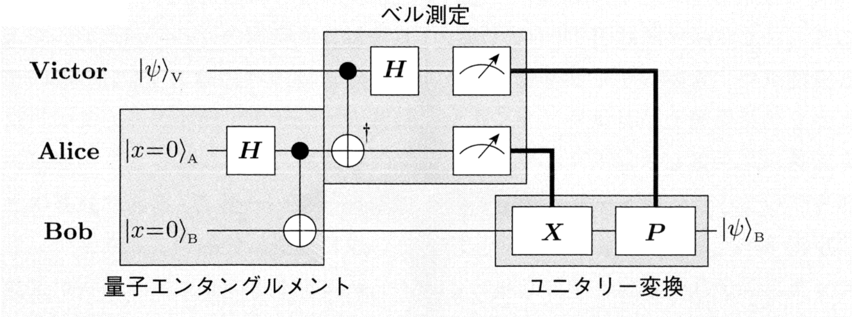


図 2.11　連続量テレポーテーションの量子回路

同じに見えるが，細部が多少異なっている．

連続量テレポーテーションで送られる状態は，一般の状態ベクトル

$$|\psi\rangle_V = \int dx\psi(x)|x\rangle_V$$

である．また，量子ビットのテレポーテーションで $|0\rangle$ だったアリスとボブの入力状態は $|x=0\rangle$ になっている．さらにそれぞれの論理ゲートも少しずつ動作が異なっている．これらについて説明していこう．

まず，$|x=0\rangle$ は演算子 $\hat{x}$ の $x=0$ を固有値とする固有状態である．これは図 1.15 に示した x 方向にスクイーズされた真空場の極限である．次に連続量でのアダマールゲートは位相空間での $90°$ の位相シフト (あるいはフーリエ変換) である．この変換により，図 2.12 のように，

$$|x=0\rangle \rightarrow |p=0\rangle = c\int dx|x\rangle \tag{2.46}$$

のように変換される．さらに連続量での制御ノットゲートは，

$$|x\rangle \otimes |y\rangle \rightarrow |x\rangle \otimes |x+y \bmod \infty\rangle = |x\rangle \otimes |x+y\rangle \tag{2.47}$$

となるが，量子ビットのとき $|x\rangle \otimes |y\rangle \rightarrow |x\rangle \otimes |x+y \bmod 2\rangle$ であったことを思い出すと，量子ビットの場合の自然な拡張であることがわかる．

ここまで準備をしておいて，図 2.11 の量子エンタングルメントとして囲われている部分の動作を見ると，

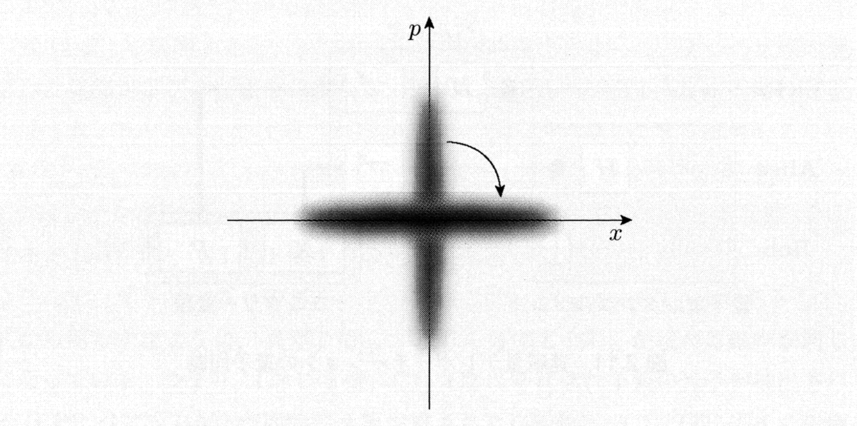


図 2.12 連続量アダマールゲートのイメージ

$$
\begin{aligned}
&|x=0\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |x=0\rangle_{\mathrm{B}} \xrightarrow{\mathrm{H}} c\int dx|x\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |x=0\rangle_{\mathrm{B}} \\
&\xrightarrow{\mathrm{CNOT}} c\int dx|x\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |x+0\rangle_{\mathrm{B}} = c\int dx|x\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |x\rangle_{\mathrm{B}}
\end{aligned}
\tag{2.48}
$$

となっており，EPR 状態である

$$
c\int dx|x\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |x\rangle_{\mathrm{B}}
$$

を生成している．また，EPR 状態は式 (1.201) の $q \to 1$ の極限であるから，

$$
|\mathrm{EPR}\rangle_{\mathrm{AB}} = \lim_{q\to 1} \sqrt{1-q^2} \sum_{n=0}^{\infty} q^n |n\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |n\rangle_{\mathrm{B}} \tag{2.49}
$$

とも書ける．

同様に図 2.11 のベル測定として囲われている部分について考える．まず制御ノット (†) があるが，これは制御ノットの逆演算で，

$$
|x\rangle \otimes |y\rangle \to |x\rangle \otimes |x-y\rangle \tag{2.50}
$$

である．量子ビットの場合は制御ノットの逆演算は制御ノットそのものであったので，これらの間に区別はなかったが，連続量では区別している．また，アダマールゲートは先ほど同様位相空間での 90° の位相シフトであるから，この

部分では $\hat{x}_{\mathrm{V}}-\hat{x}_{\mathrm{A}}$，$\hat{p}_{\mathrm{V}}+\hat{p}_{\mathrm{A}}$ の同時固有状態への射影を行っていることになる．$\hat{x}_{\mathrm{V}}-\hat{x}_{\mathrm{A}}$，$\hat{p}_{\mathrm{V}}+\hat{p}_{\mathrm{A}}$ の同時固有状態は (広義[27]の) EPR 状態であるから，ここでの操作は EPR 状態への射影操作といえる．量子ビットの場合，ベル測定とはベル基底への射影であり，ベル基底とはエンタングルした 2 量子系の 2 次元の基底のことであるから，連続量の場合，エンタングルした 2 量子系の無限次元の基底である (広義の) EPR 状態への射影をベル測定と呼んでもよいであろう．つまり，この部分は連続量版のベル測定をしているのである．ベル測定の効果は，量子ビットのときと同様，もともと独立であった量子系をエンタングルさせることであり，ここではヴィクターとアリスをエンタングルさせている．

この様子を式で見てみよう．$\hat{x}_{\mathrm{V}}-\hat{x}_{\mathrm{A}}$，$\hat{p}_{\mathrm{V}}+\hat{p}_{\mathrm{A}}$ の同時固有状態は固有値をそれぞれ x_-，p_+ として，

$$|x_-,p_+\rangle_{\mathrm{VA}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\hat{D}_{\mathrm{V}}(x_-+ip_+)|n\rangle_{\mathrm{V}}|n\rangle_{\mathrm{A}} \tag{2.51}$$

である．ここで，$\hat{D}_{\mathrm{V}}(x_-+ip_+)$ は式 (1.133) で定義した変位演算子である．連続量のベル測定はこの状態への射影であるから，ヴィクターとアリスをエンタングルさせていることがわかる．

ベル測定前の系全体の状態ベクトルは，ヴィクターから渡されたアリスへの入力状態 (テレポートしたい状態) を $|\psi\rangle_{\mathrm{V}}$ として，$|\psi\rangle_{\mathrm{V}}\otimes|\mathrm{EPR}\rangle_{\mathrm{AB}}$ である．ベル測定後は $\hat{x}_{\mathrm{V}}-\hat{x}_{\mathrm{A}}$，$\hat{p}_{\mathrm{V}}+\hat{p}_{\mathrm{A}}$ の同時固有状態である式 (2.51) の $|x_-,p_+\rangle_{\mathrm{VA}}$ への射影になるから，ベル測定後の系の状態 $|\Psi(x_-,p_+)\rangle_{\mathrm{B}}$ は，

$$|\Psi(x_-,p_+)\rangle_{\mathrm{B}}=\lim_{q\to 1}\sqrt{\frac{1-q^2}{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}q^n|n\rangle\langle n|\hat{D}(-x_--ip_+)|\psi\rangle_{\mathrm{B}} \tag{2.52}$$

となる．$q\to 1$ のとき，

$$\sum_{n=0}^{\infty}q^n|n\rangle\langle n|\to\hat{I}\quad(\text{恒等変換})$$

---

[27] 狭義の EPR 状態は固有値として $x_{\mathrm{V}}-x_{\mathrm{A}}=0$，$p_{\mathrm{V}}+p_{\mathrm{A}}=0$ の場合としたが，ここでは任意の実数である．

となるから，この式の意味は，ベル測定後ボブのところにある状態は，入力 $|\psi\rangle$ が位相空間で $-x_- - ip_+$ だけ変位したものということである．したがって，ボブがアリスからベル測定の結果である (x_-, p_+) を聞いて，$x_- + ip_+$ だけ変位させれば入力の状態を再現できることになる．量子ビットの場合は，アリスからの情報に基づいてユニタリー変換 $\hat{X}$，$\hat{Z}$ を施していたが，連続量の場合は $\hat{D}(x_-)$，$\hat{D}(ip_+)$ を施すことになる．

2.3.4 カリフォルニア工科大学での実験

筆者らはカリフォルニア工科大学において連続量のテレポーテーション実験を行った[28]．図 2.11 の具現化は，制御ノットゲートをハーフビームスプリッターで置き換え，$|x = 0\rangle$ をスクイーズされた真空場で置き換えることにより達成した．実験のイメージを図 2.13 に示す．

例えば，図 2.11 の量子エンタングルメントで囲われている部分は，制御ノットゲートを適当な位相で合波するハーフビームスプリッターを用いて構成することができる．この場合のハーフビームスプリッター演算子は，式 (1.196) の $\hat{B}_{\mathrm{HBS}*}$ であり，入力 $|x\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |y\rangle_{\mathrm{B}}$ を次式のように変換する[29]．

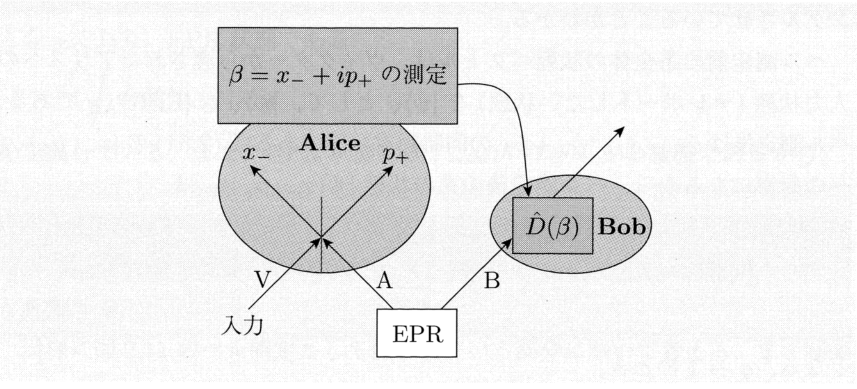


図 2.13 連続量テレポーテーション実験のイメージ
EPR：2 モードスクイーズされた真空場生成源．

[28] A. Furusawa *et al.*, *Science* **282**, 706 (1998).

[29] 章末問題の解答の式 (ii)–(v) を参照．

$$\hat{B}_{\rm HBS*}|x\rangle_{\rm A}\otimes|y\rangle_{\rm B}=\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right\rangle_{\rm A}\otimes\left|\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right\rangle_{\rm B} \tag{2.53}$$

図 2.11 の場合は，ビームスプリッターへの入力が

$$\int dx|x\rangle_{\rm A}\otimes|0\rangle_{\rm B}$$

であるから，この場合の出力は，

$$\hat{B}_{\rm HBS*}\int dx|x\rangle_{\rm A}\otimes|0\rangle_{\rm B}=\int dx\left|\frac{x}{\sqrt{2}}\right\rangle_{\rm A}\otimes\left|\frac{x}{\sqrt{2}}\right\rangle_{\rm B} \tag{2.54}$$

となるから，改めて $x/\sqrt{2}$ を x と書けば，式 (2.48) と同じことをしていることがわかる．

$|x=0\rangle$ をスクイーズされた真空場で置き換えた場合，式 (2.49) において $q\to 1$ の極限ではなくなるが，$q>0$ であるため量子エンタングルメントは存在し，近似的に図 2.11 の量子回路を動かしたことになる．また，この場合，ベル測定後の状態も式 (2.52) から少しずれることになる．

実験の様子を式 (1.215) で導入した簡略化したハイゼンベルク表示を用いて記述する．また，この様子を視覚的に明らかにするために，図 2.14 に少し詳しめの実験図を示す．ハーフビームスプリッターで位相が直交した 2 つのスクイーズされた真空場を合波することが，図 2.11 の量子エンタングルメントで囲われている部分を実験的に行うことに相当する．その状態 (EPR ビーム) は式 (1.215) を再掲すると，

$$\begin{cases}\hat{x}_{\rm A}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{r}\hat{x}_{\rm A}^{(0)}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-r}\hat{x}_{\rm B}^{(0)}\\ \hat{p}_{\rm A}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-r}\hat{p}_{\rm A}^{(0)}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{r}\hat{p}_{\rm B}^{(0)}\\ \hat{x}_{\rm B}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{r}\hat{x}_{\rm A}^{(0)}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-r}\hat{x}_{\rm B}^{(0)}\\ \hat{p}_{\rm B}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-r}\hat{p}_{\rm A}^{(0)}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{r}\hat{p}_{\rm B}^{(0)}\end{cases} \tag{2.55}$$

のように書ける．

ベル測定に用いるハーフビームスプリッターでの変換により，モード in，A はモード −，+ へ次のように変換される．

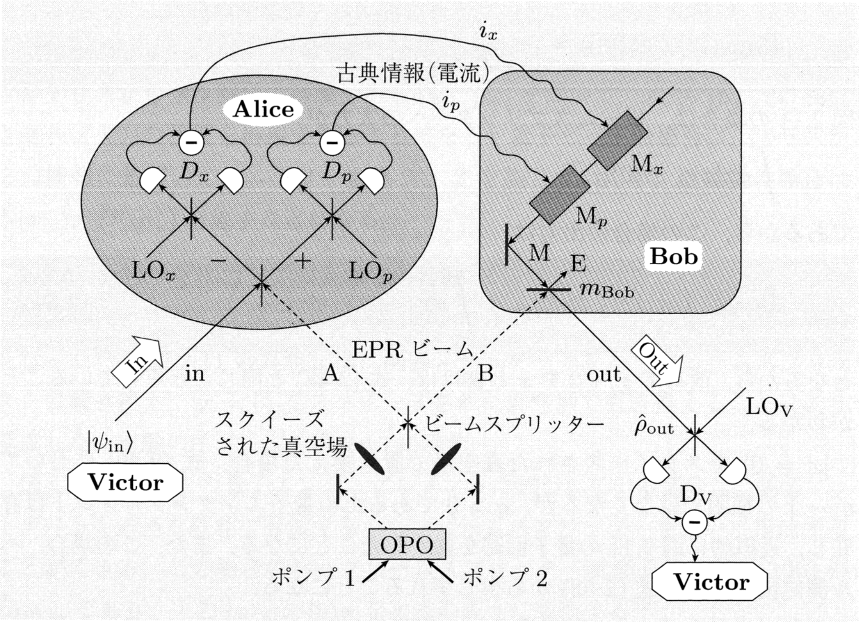


図 2.14 連続量テレポーテーション実験系
OPO：光パラメトリック発振器 (スクイーズされた真空場生成装置),
$\mathrm{LO}_{x,p}$：ローカルオシレーター光,
$\mathrm{D}_{x,p}$：ホモダイン検出器,
$\mathrm{M}_{x,p}$：光変調器,
m_{Bob}：99/1 ビームスプリッター

$$\begin{cases} \hat{x}_- = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{x}_{\mathrm{in}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{x}_{\mathrm{A}} \\ \hat{p}_- = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{p}_{\mathrm{in}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{p}_{\mathrm{A}} \\ \hat{x}_+ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{x}_{\mathrm{in}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{x}_{\mathrm{A}} \\ \hat{p}_+ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{p}_{\mathrm{in}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{p}_{\mathrm{A}} \end{cases} \tag{2.56}$$

さらに，アリスはホモダイン測定 (正確にはバランス型ホモダイン測定) を行い，$\hat{x}_-$ と $\hat{p}_+$ を測定する．

ここで，完全な EPR ビームの場合 ($r \to \infty$)，アリスはヴィクターの状態 $(\hat{x}_{\rm in}, \hat{p}_{\rm in})$ について何の情報も得ていないことがわかる．なぜなら，$\hat{x}_-$ と $\hat{p}_+$ において，$(\hat{x}_{\rm A}, \hat{p}_{\rm A})$ に由来する量子ノイズ (振幅 $e^r \hat{x}_{\rm A}^{(0)}$)≡ EPR ノイズが発散して，$(\hat{x}_{\rm in}, \hat{p}_{\rm in})$ の情報を覆い隠してしまうからである．これにより，入力状態を直接測定により決めることはできないという不確定性原理の壁を回避して，量子状態の伝送であるテレポーテーションを可能にしているともいえる．

式 (2.55)，(2.56) を用いると，モード B は次式のようになる．

$$\begin{aligned} \hat{x}_{\rm B} &= \hat{x}_{\rm in} - \sqrt{2} e^{-r} \hat{x}_{\rm B}^{(0)} - \sqrt{2} \hat{x}_- \\ \hat{p}_{\rm B} &= \hat{p}_{\rm in} + \sqrt{2} e^{-r} \hat{p}_{\rm A}^{(0)} - \sqrt{2} \hat{p}_+ \end{aligned} \tag{2.57}$$

アリスのベル測定の結果，$\hat{x}_-$，$\hat{p}_+$ は，それぞれ x_-，p_+ に変化する．EPR ノイズ $\sqrt{2} e^{-r} \hat{x}_{\rm B}^{(0)}$，$\sqrt{2} e^{-r} \hat{p}_{\rm A}^{(0)}$ を除くと，$(-\sqrt{2} x_-, -\sqrt{2} p_+)$ だけ，入力状態 $(\hat{x}_{\rm in}, \hat{p}_{\rm in})$ が，位相空間で変位していることがわかる．つまり，式 (2.52) で見たように，ベル測定の直後，ボブのモードは入力状態が $-\sqrt{2}(x_- + ip_+)$ だけ変位した状態になっている[30)]．

アリスは自分のベル測定結果 x_-，p_+ をボブに送る．ボブはその (古典的) 情報を用いて光の状態を $\sqrt{2}(x_- + ip_+)$ だけ変位させ入力状態を再現する．ここで，この変位操作もビームスプリッター (図 2.14 では分岐比 99/1) と変調器により実現できる．図 2.14 に $m_{\rm Bob}$ で示されているビームスプリッターでは以下の変換が起こる．

$$\begin{cases} \hat{x}_{\rm out} = \sqrt{1-\epsilon^2} \hat{x}_{\rm B} + \epsilon \hat{x}_{\rm M} \\ \hat{p}_{\rm out} = \sqrt{1-\epsilon^2} \hat{p}_{\rm B} + \epsilon \hat{p}_{\rm M} \\ \hat{x}_{\rm E} \ \ = \sqrt{1-\epsilon^2} \hat{x}_{\rm M} - \epsilon \hat{x}_{\rm B} \\ \hat{p}_{\rm E} \ \ = \sqrt{1-\epsilon^2} \hat{p}_{\rm M} - \epsilon \hat{p}_{\rm B} \end{cases} \tag{2.58}$$

ここで，変調器の加えた変調の振幅に相当する $\hat{x}_{\rm M}$，$\hat{p}_{\rm M}$ は，振幅が十分大きいときには古典量と考えることができ[31)]，ビームスプリッターの振幅反射係数

---

30) $\sqrt{2}$ だけ式 (2.52) と異なるのは，ハーフビームスプリッターで振幅を $1/\sqrt{2}$ にしているからである．

31) 便利なので，また使ってしまったが，節 1.8 で述べたように注意が必要である．

$\epsilon \to 0$ において $\epsilon x_{\mathrm{M}} = \sqrt{2}x_-$，$\epsilon p_{\mathrm{M}} = \sqrt{2}p_-$ となるようにすれば，所望の変位操作ができる．したがって，この操作により最終的な状態である $(\hat{x}_{\mathrm{tel}}, \hat{p}_{\mathrm{tel}})$ を生成する．式で表現すると

$$\begin{aligned} \hat{x}_{\mathrm{tel}} &= \hat{x}_{\mathrm{B}} + g\sqrt{2}x_- \\ \hat{p}_{\mathrm{tel}} &= \hat{p}_{\mathrm{B}} + g\sqrt{2}p_+ \end{aligned} \tag{2.59}$$

となる．ここで g は一般化された情報伝達のゲイン[32]であり，検出器の量子効率等のロスを考慮するとき必要になるものであるが，話を単純にするためここでは $g = 1$ とする．このとき，再生された状態 $(\hat{x}_{\mathrm{tel}}, \hat{p}_{\mathrm{tel}})$ は

$$\begin{aligned} \hat{x}_{\mathrm{tel}} &= \hat{x}_{\mathrm{in}} - \sqrt{2}e^{-r}\hat{x}_{\mathrm{B}}^{(0)} \\ \hat{p}_{\mathrm{tel}} &= \hat{p}_{\mathrm{in}} + \sqrt{2}e^{-r}\hat{p}_{\mathrm{A}}^{(0)} \end{aligned} \tag{2.60}$$

となる．ここで，EPR ビームが完全な場合，$r \to \infty$ であるから，$\hat{x}_{\mathrm{tel}} \to \hat{x}_{\mathrm{in}}$，$\hat{p}_{\mathrm{tel}} \to \hat{p}_{\mathrm{in}}$ となり，完全な量子テレポーテーションとなっている．

これらの一連の操作は次のようにも解釈できる．

前述したように，アリスとボブで非常に大きなノイズ (EPR ノイズ) を共有しており，アリスは入力状態とこのノイズを合わせて測定するため，入力状態に関する情報を得ることはない．アリスはこのノイズだらけの測定結果をボブに送る．ボブはこの測定結果に基づいて光の状態を生成し，最後に EPR ノイズを引き去ることにより入力状態を再現する．

少し話題を変えよう．現実の実験ではいろいろなロスのメカニズムが存在するし，無限のスクイーズ，つまり完全な EPR 状態は得られないから，ここまで述べてきた完全なテレポーテーションは不可能である．したがって，テレポーテーションの成功を定義する必要がある．通常，量子テレポーテーションの成功は，古典的操作のみでは超えることができない限界 (古典限界) を超えた場合として定義される．もう少し定量的にいうと，入力状態の状態ベクトルを $|\psi_{\mathrm{in}}\rangle$ とし，出力状態の密度演算子 $\hat{\rho}_{\mathrm{out}}$ とした場合の内積に相当するフィデリティ $F = \langle\psi_{\mathrm{in}}|\hat{\rho}_{\mathrm{out}}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle$ で議論する場合が多いようである．入力がコヒーレント状態

---

[32] 量子ビットのテレポーテーションにはゲインの概念はない．あるいはつねに $g = 1$ ともいえる．

の場合，古典限界のフィデリティは $F = 0.5$ であることが知られており，この値を上回ったときに，量子テレポーテーションが成功したということができる．

筆者らが行った連続量テレポーテーション実験の結果をウィグナー関数の形で表したものを図 2.15 に示す．このとき，入力状態はコヒーレント状態であり，テレポーテーションが成功した場合のフィデリティは $F = 0.58$ であった．図 2.15 からわかるように，量子エンタングルメント (EPR ビーム) を用いたときに，古典的限界を超えて入力状態が再生，つまり量子テレポーテーションに成功していることがわかる．現在では，高いレベルのスクイーズを用いて，高いフィデリティのテレポーテーションが報告されつつある．また，入力状態としてコヒーレント状態以外の状態を用いることも今後の重要な課題である．

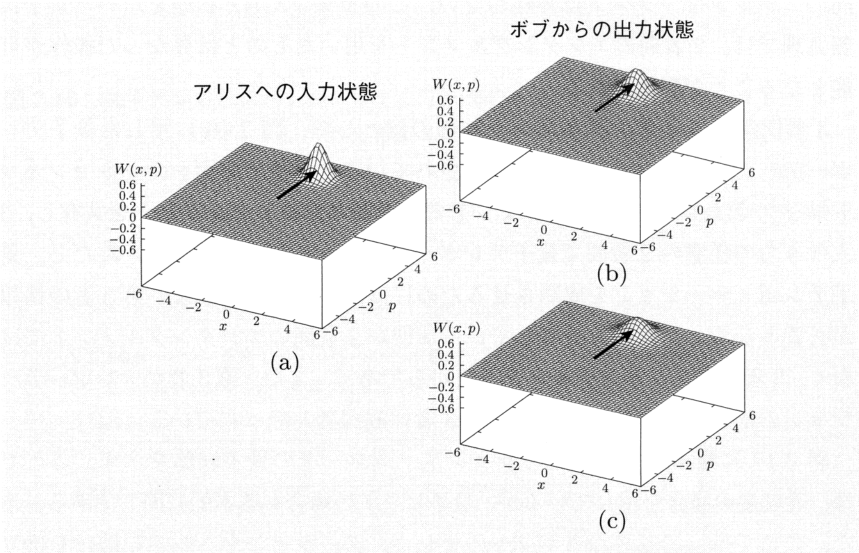


図 2.15　連続量量子テレポーテーション実験結果

矢印は古典情報 (平均値) を示しており,「山」のかたちは情報の量子的部分 (ゆらぎ) を示している．

(a)　送りたい状態 (入力状態),

(b)　EPR ビームを用いた場合＝量子テレポーテーション,

(c)　EPR ビームを用いない場合＝古典限界.

2.3.5　量子テレポーテーションネットワーク

量子情報処理とは，前述したように，多数の量子系でエンタングルメントを生成し，その制御をしていくことである．理屈はよく理解されているが，実験的に実現するとなると，かなり難しい．いままで述べてきた量子テレポーテーションは，途中で 3 者間の量子エンタングルメントが生成されてはいるが，基本的には 2 者間の量子エンタングルメント (EPR ペア，EPR 相関) を制御していく過程と考えられる．したがって，それをもっと多者間のエンタングルメントの制御に拡張していくことが求められる．多者間のエンタングルメントは小節 1.11.2 で見たように，根本的に 2 者間のエンタングルメントとは異なるものである．例えば，3 者間エンタングルメントの 1 つである GHZ 状態では，2 者間のエンタングルメントは存在しない．このような GHZ 状態を用いた量子情報処理では，2 者間のエンタングルメントを用いたものとは異なった操作が可能となることが想像される．

3 者間量子エンタングルメント制御の例として，図 2.16 に示した量子テレポーテーションネットワークが提案されている．量子テレポーテーションネットワークでは，アリス，ボブ，クレアで 3 者間エンタングルメントを共有し，3 人のうちの任意の 2 者間で量子テレポーテーションが可能となる．ただし，量子テレポーテーションを成功させるためには，送受信者ではない第 3 者の情報が必要となる．これは，共有している状態が 2 者間のエンタングルメントではなく，3 者間のエンタングルメントだからである．また，第 3 者がテレポーテーションの成否を決めているので，第 3 者は制御者と呼ばれている．

図 2.17 に量子テレポーテーションネットワークの量子回路を示す．ここでは，連続量の場合を示しているが，量子ビットの場合も基本的に同じである．また，ここでは，アリスからボブへのテレポーテーションをクレアの助けを借りて行う場合を示しているが，アリス，ボブ，クレアの 3 者は同等であり，役割を入れ替えることができる．その場合の量子回路も同様である．図 2.17 の量子回路を現実の実験にするためには，連続量のテレポーテーションの場合と同様，$|x=0\rangle$ をスクイーズされた真空場，アダマールゲートを 90° の位相シフト，制御ノットゲートをビームスプリッターで置き換える．多少，通常の連続量テレポーテーションの場合と異なるのは，ビームスプリッターの一部が分岐比 1:2

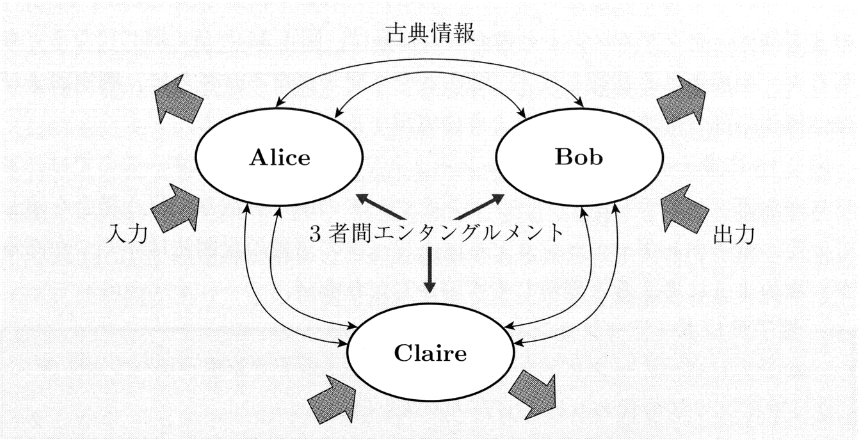


図 2.16 量子テレポーテーションネットワークのイメージ図
アリス，ボブ，クレアで 3 者間エンタングルメントを共有し，3 人のうちの任意の 2 者間で量子テレポーテーションが可能となる．ただし，量子テレポーテーションを成功させるためには，送受信者ではない第 3 者の情報が必要となる．

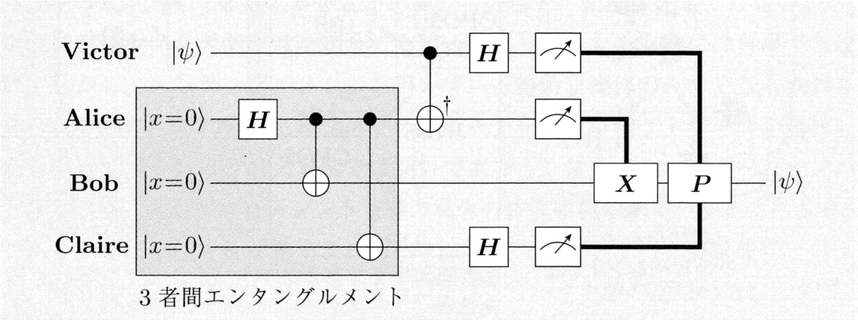


図 2.17 量子テレポーテーションネットワークの量子回路
ここでは，アリスからボブへのテレポーテーションをクレアの助けを借りて行う場合を示している．ただし，アリス，ボブ，クレアの 3 者は同等であり，役割を入れ替えることができる．

のビームスプリッターに変わるだけである．そのように置き換えると，図 2.17 の 3 者間エンタングルメントと書かれた部分は，図 1.34 と全く同じになる．もちろん，生成される状態も式 (1.220) と全く同じになる．さらに，測定および変位操作の部分もこれらと同じように実現することができる．

図 2.18 に量子テレポーテーションネットワーク実験図を示す．ここでは，アリスからボブへのテレポーテーションをクレアの助けを借りて行う場合を示している．量子テレポーテーションネットワークの原理の説明法はいくつかあるが，次のように考えると理解しやすいかもしれない．

量子テレポーテーションネットワーク

量子テレポーテーションネットワークでは，量子テレポーテーションでの EPR ノイズの代わりに GHZ ノイズを用いる．

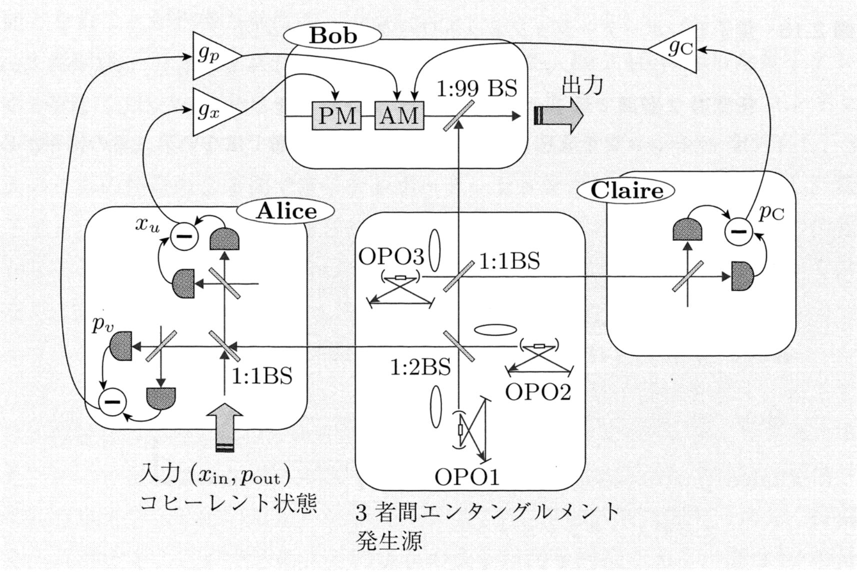


図 2.18　量子テレポーテーションネットワーク実験図
ここでは，アリスからボブへのテレポーテーションをクレアの助けを借りて行う場合を示している．ただし，アリス，ボブ，クレアの 3 者は同等であり，役割を入れ替えることができる．

GHZ ノイズとは，式 (1.220) における $e^{+r_{\mathrm{A}}}\hat{x}_{\mathrm{A}}^{(0)}$ で象徴されるようなノイズであり，r_{A} が十分に大きければ，非常に大きなノイズである．送信者であるアリスは，送りたい状態と GHZ ノイズを混ぜて直交位相成分を測定する．ノイズは非常に大きいため，アリスは入力に関する情報 (直交位相成分の振幅の値) を得ることはできないが，その結果をボブに送る．クレアもこのノイズに関して測定 (p 成分を測定) を行い，結果をボブに送る．GHZ ビームは理想的には不等式 (1.218) の左辺が零に近づいた極限であるから，3 人の所に来ているノイズには相関があり，この相関を用いてボブはノイズを消去できる．例えば，

$$\hat{x}_{\mathrm{A}} - \hat{x}_{\mathrm{B}} = \sqrt{\frac{3}{2}}e^{-r_{\mathrm{B}}}\hat{x}_{\mathrm{B}}^{(0)} - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-r_{\mathrm{C}}}\hat{x}_{\mathrm{C}}^{(0)}$$

となるから，$r_{\mathrm{B}} = r_{\mathrm{C}} \to \infty$ となれば，$\hat{x}_{\mathrm{A}} - \hat{x}_{\mathrm{B}} \to 0$ となる．このようにボブはノイズに埋もれた入力状態を再現できる．これが量子テレポーテーションネットワークの動作原理である．しかし，GHZ 状態において，2 者間のエンタングルメントは存在しないから，送信者と受信者の 2 者だけでは量子テレポーテーションは成立しない．そのため，前述したように 3 人目を制御者と呼んでいる．3 人目の参加如何によってテレポーテーションの成否が決まるからである．

残念ながら，実際の実験で用いる GHZ ビームは完全な GHZ 状態にはないから，不等式 (1.217) を考える必要がある．この場合，相関は完全ではないから，ボブにおけるノイズ消去は不完全である．つまり，入力を完全には再現できない．しかし，エンタングルメントを用いず，古典的な操作のみでできる限界も知られており，これを超えれば量子テレポーテーションネットワークが動作したといってもそれほど誇大宣伝ではないであろう．量子テレポーテーションのときと同様，入力がコヒーレント状態の場合の古典限界はフィデリティ $F = 0.5$ であり，これを超えれば量子テレポーテーションネットワーク実験成功といえる．図 2.19 に，量子テレポーテーションネットワーク実験の結果の例を示す[33]．ここで，縦軸はテレポーテーションのフィデリティであり，横軸は制御者からの規格化された情報伝達ゲインである．情報伝達ゲインは $g = 0$ で制御者からの情報は零，$g = 1$ で制御者の測定結果を増幅も減衰もせずそのままの大きさで送ることを意味している．

---

[33] H. Yonezawa *et al.*, *Nature* **431**, 430 (2004).

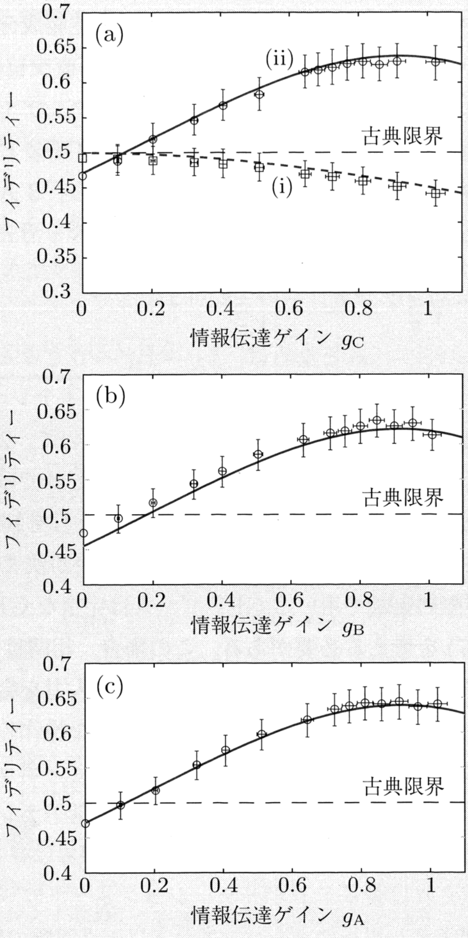


図 2.19　量子テレポーテーションネットワーク実験結果

(a)　アリスからボブ，(b)　アリスからクレア，(c)　クレアからボブへのテレポーテーションにおけるフィデリティーの制御者情報伝達ゲイン依存性．(a) において (i)GHZ ビーム (3 者間エンタングルメント) を用いない場合，(ii)GHZ ビームを用いた場合である．

図 2.19 からわかることは大きく分けて 2 つある．1 つ目は 3 つの組合せで，量子テレポーテーションが成功していることである．どの組合せでもフィデリティは最高で 0.64 程度であり，古典限界の 0.5 を超えている．この 3 つの組合せで量子テレポーテーションが成功していることは，不等式 (1.217) を全て満たしている証拠であるし，そのような状態を使ったのだから当然でもある．2 つ目は制御者からの情報がない，つまり $g = 0$ の場合，いずれの場合もフィデリティが 0.5 を下回り，量子テレポーテーションに失敗していることである．これらのことは，我々の用いている 3 者間エンタングルメントが「真の」3 者間エンタングルメントであることを示している．つまり，GHZ 状態に近い「真の」3 者間エンタングルメントでは，2 者間ではエンタングルしていないことを示している．以上より，量子テレポーテーションネットワーク実験の成功は「真の」3 者間量子エンタングルメントを使って行われた量子演算の成功ともいえる．

最後に，量子テレポーテーションネットワーク実験装置の写真を次ページの写真 2.1 に示す．図 2.18 を現実の実験系に置き換えると，いかに複雑になるかがわかるであろう．

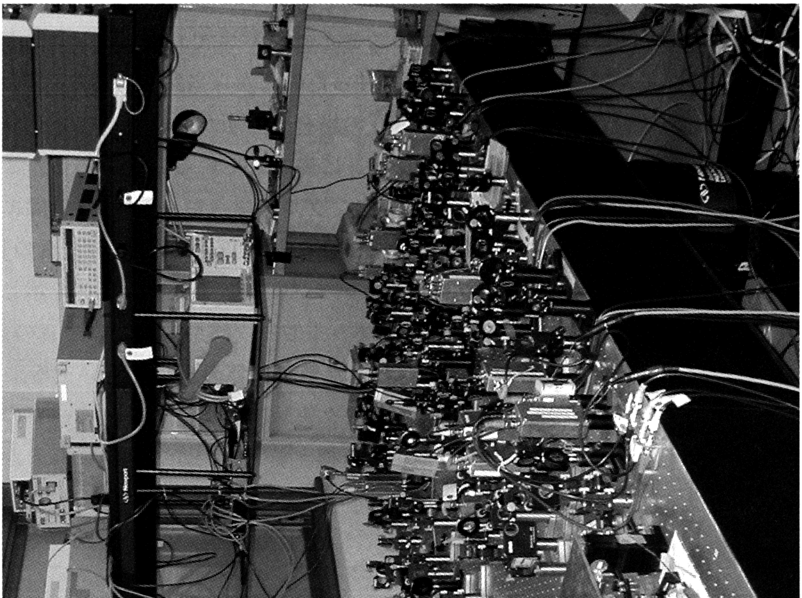


写真 2.1　量子テレポーテーションネットワーク実験装置写真

2.4 量子エラーコレクション

情報処理を何らかの物理系で実現するにはエラーコレクションが欠かせない．これは，現実の物理系でエラーレートを零にすることは不可能であり，有限のエラーレートを持つ処理系で，いわゆるエラーフリーを実現するためには，情報そのものを冗長化し，システム全体にある種のエラー耐性を生じさせなければならないということである．いままでの情報処理ではそれが可能であった．最も簡単な例は，トリプルビットコードと呼ばれる次のようなコードである．

$$\begin{aligned} 0_{\mathrm{L}} &= 000 \\ 1_{\mathrm{L}} &= 111 \end{aligned} \tag{2.61}$$

トリプルビットコードでは，3 ビットのうち 1 ビットが反転しても (ビットフリップと呼ぶ，例えば 000 が 010 になる)，残りがそのままであれば多数決によりもとに戻すことができる．つまり，エラーコレクションできる．このとき重要なのは，当たり前だが，各ビットが 0 か 1 のどちらかであるかを知ることである．個々のビットの値を測定により知り，どのようなエラーであるかを明らかにすればエラーコレクションが可能なのである．

しかし，この方法は量子情報処理では使えない．なぜなら，個々の量子ビット (あるいは量子状態) を測定しても量子情報は取り出せないし (量子状態を決められないし)，そもそも量子状態は壊れてしまう．つまり，通常の方法では量子情報処理においてエラーコレクションは不可能である[34)]．この点を取り上げて，量子情報処理は実現不可能であるといわれていた時代すらあった．これに対し，量子情報処理においてもエラーコレクションは可能であることが示された[35)]．ここでは，その代表例である，ショアにより提案されたコードについて述べる．

---

34) 問題設定が量子テレポーテーションの場合と同じであることがわかる．したがって，量子エラーコレクションにおいてもエンタングルメントとベル測定が中心的な役割を担うことになる．

35) 例えば，P.W. Shore, *Phys. Rev. A* **52**, 2493 (1995).

2.4.1 量子ビットのエラーコレクション

量子ビット

$$|\psi_2\rangle = c_0\,|0\rangle + c_1\,|1\rangle = \sum_{i=0}^{1} c_i\,|i\rangle \quad (|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1)$$

は，エラーにより

$$|\psi_2'\rangle = c_0'\,|0\rangle + c_1'\,|1\rangle$$

に変化する．ただし，$|c_0'|^2 + |c_1'|^2 = 1$ を仮定する．つまり，エラーはユニタリー変換とする．任意の 1 量子ビット (ユニタリー) エラーは，エラーなし ($\hat{I}$)，ビットフリップ (式 (2.27) に示した $\hat{X}$)，位相フリップ (式 (2.28) に示した $\hat{Z}$)，ビットフリップ+位相フリップ ($\hat{X}\hat{Z}$) の線形結合で書ける[36]．したがって，ビットフリップと位相フリップをコレクションできれば，ユニバーサルなエラーコレクションができることになる．

もう少し詳しく見てみよう．例としてショアが提案したビットフリップエラーをコレクションする量子版トリプルビットコードを考えてみる．ショアのトリプルビットコードでは守りたい量子ビット $|\psi_2\rangle$ を図 2.20 のような量子回路 (エンコード量子回路) に入力させ[37]，

$$|\psi_2\rangle_t = c_0\,|000\rangle + c_1\,|111\rangle = \sum_{i=0}^{1} c_i\,|i,i,i\rangle$$

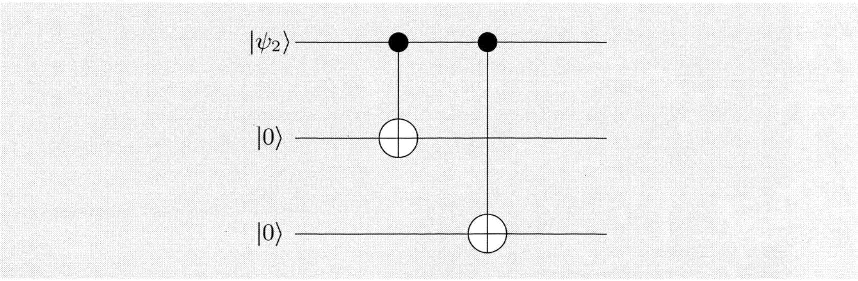


図 2.20 ショアの量子版トリプルビットコードにおけるエンコード量子回路

[36] 「任意の 2 行 2 列の行列は，単位行列とパウリ行列の和で書ける」以上の意味はない．したがって，ユニタリーである必要はない．しかし，コレクション可能なためにはエラーの逆変換が必要になるから，ユニタリーであることが必要になる．

[37] 繰り返しになるが，$|000\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle$ である．

を生成する．

やりたいことは (c'_0, c'_1) を (c_0, c_1) に戻すことであるが，別の考え方をしてみる．1 ビットのビットフリップエラー演算子は $\hat{X}$ であるから，エラーによる「変換」は次のように書ける．

$$|\psi'_2\rangle = \hat{X}\,|\psi_2\rangle = \sum_{i=0}^{1} c_i \hat{X}\,|i\rangle = \sum_{i=0}^{1} c_i\,|i+1 \bmod 2\rangle \tag{2.62}$$

同様に，トリプルビットコードでの 1 ビットフリップエラーは次のように書ける．

$$|\psi'_2\rangle_t = \hat{X}\,|\psi_2\rangle_t = \sum_{i=0}^{1} c_i \hat{X}\,|i,i,i\rangle = \sum_{i=0}^{1} c_i\,|i+1 \bmod 2, i, i\rangle \tag{2.63}$$

ただし，第 1 ビットがビットフリップエラーしたことにしている．

エラーコレクションのため，どこにエラーが起きたかを特定しなければならないが，それには図のような量子回路 (デコード量子回路) を用いる．

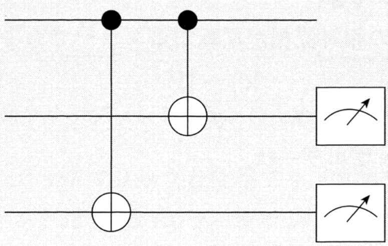


図 2.21　ショアの量子版トリプルビットコードにおけるデコード量子回路
測定の出力は 0 か 1 である．

この量子回路では，第 1 ビットと第 2 ビットおよび第 1 ビットと第 3 ビットの間の排他的論理和演算 $(i+j \bmod 2)$[38] を行い，その値を測定する．式 (2.63) から，測定値は 11 となることがわかる．同様に第 2 ビットエラー，第 3 ビットエラー，エラーなしの場合，それぞれ測定値が 10，01，00 となる．したがって，

---

[38] 正確にいえば，排他的論理和の逆演算を行うことになるが，排他的論理和の逆演算は排他的論理和そのものであるため，排他的論理和演算を行う．

この測定により，どのビットにエラーが存在するかを知ることができる．この測定の巧いところは，個々のビットを直接測定することなく，2つの排他的論理和のみを測定することである．つまり，波束を完全には収縮させず，c_i を保存している．最後にエラーが起こっているビットに $\hat{X}$ を作用させれば，コレクション終了である．以上から，量子エラーコレクションは (c_0', c_1') を (c_0, c_1) に変換するというよりは，基底をエラーの逆変換によりもとに戻すというイメージである．この様子はかなりの部分，量子ビットのテレポーテーションに通じていることもわかるであろう．量子ビットのテレポーテーションでは，ベル測定の結果に基づいてエラーコレクションしているともいえる．

量子情報では古典的な対応のあるビットフリップエラーのほかに，古典的対応のない位相フリップエラーがある．位相フリップは前述したように式 (2.28) に示した $\hat{Z}$ による変換に対応するが，もう少し具体的に書けば，

$$\begin{aligned} \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} &\to \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \\ \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} &\to \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{2.64}$$

のように，$|0\rangle$ と $|1\rangle$ の相対位相が反転するエラーである．ここで，

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

と置けば，位相フリップエラーは，

$$\begin{aligned} |+\rangle &\to |-\rangle \\ |-\rangle &\to |+\rangle \end{aligned} \tag{2.65}$$

と書けるから，$|+\rangle$, $|-\rangle$ で表せば，ビットフリップと等価になる．したがって，図 2.22 に示した量子回路に守りたい量子ビット $|\psi_2\rangle$ を入力し，出力として

$$\begin{aligned} &c_0 \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} + c_1 \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \\ &= c_0 |+++\rangle + c_1 |---\rangle \end{aligned}$$

を得れば，ビットフリップのトリプルビットコードと同じ議論ができる．図 2.23 に位相フリップのためのデコード量子回路を示す．

前述したように，量子ビットの任意のエラーは，エラーなし ($\hat{I}$)，ビットフリップ ($\hat{X}$)，位相フリップ ($\hat{Z}$)，ビットフリップ+位相フリップ ($\hat{X}\hat{Z}$) の線

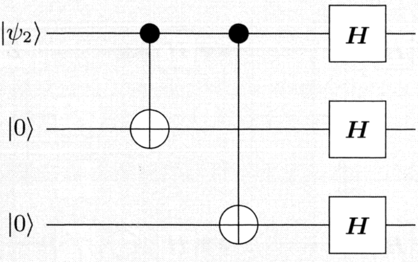


図 2.22　位相フリップコレクションのためのエンコード量子回路

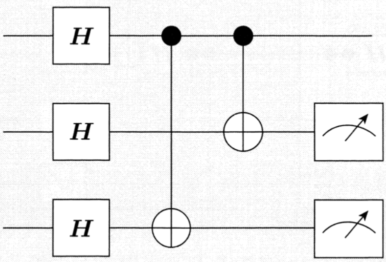


図 2.23　位相フリップコレクションのためのデコード量子回路

形結合で書けるから，ビットフリップと位相フリップエラーを両方ともコレクションできるコードがあれば任意のエラーをコレクションできる．つまり，図2.20〜2.23 を組合せたものが任意のエラーをコレクションでき，それがショアの 9 ビットコードである．図 2.24 にショアの 9 ビットコードの量子回路を示す．ビットフリップと位相フリップのコレクション用の量子回路がうまく組合されていることがわかる．ただし，このコレクションコードでは 9 ビットの中の 1 つのエラーに対してのみ有効で，2 ビット以上エラーが起こると機能しない点に注意が必要である．もちろん，複数のビットに起こるエラーに対して有効なコードも研究されているが，エラーコレクションの原理を学ぶ上で適当な例なので，このコードを取り上げた．

ここで，量子エラーコレクションの興味深い特徴は，エラーは連続的に起こる (c'_0，c'_1 には，$|c'_0|^2 + |c'_1|^2 = 1$ 以外の制限はない) のに対して，コレクショ

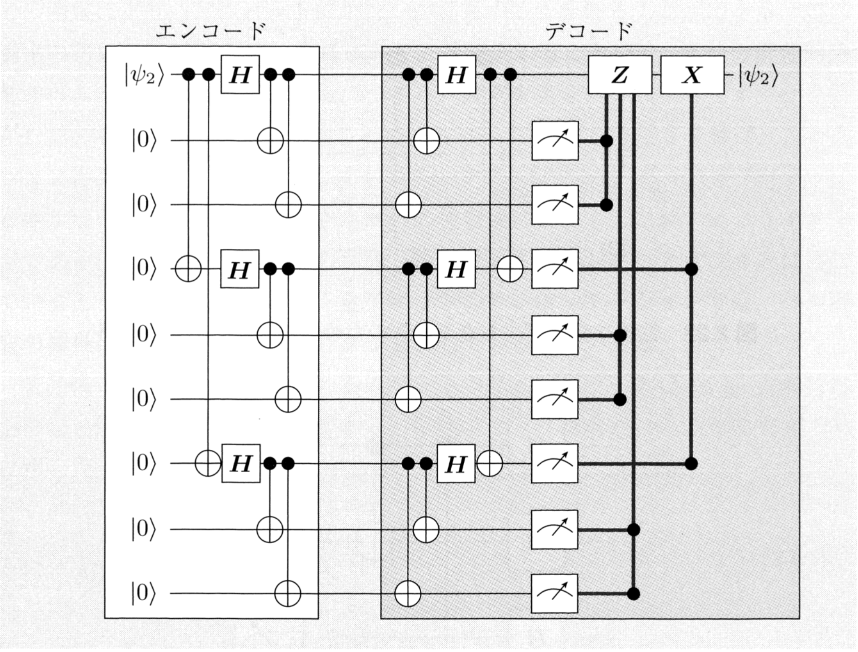


図 2.24 ショアの9ビットコードの量子回路

ンにはビットフリップをもとに戻す $\hat{X}$ と位相フリップをもとに戻す $\hat{Z}$[39] の2パターンしかないことであろう．測定により「強制的に」エラーが，エラーなし，ビットフリップエラー，位相フリップエラー，ビットフリップ+位相フリップエラーの4通りに押し込まれてしまっている．これは量子テレポーテーションにおけるベル測定と同じで，測定により強制的に波束を4つのベル基底のどれかに収縮させているからである．さらに，コレクションの過程 (デコードの最後の部分) においても，テレポーテーションと同様に測定結果に基づいてユニタリー変換している．9ビットも必要なのは9ビットのどのビットにエラーが存在しているかを知るためであるが，実際には5ビットあればよいことが知られている．このように，エラーそのものはアナログ的であるが，エラーコレ

[39] $\hat{X}$ の逆変換は $\hat{X}$ そのものであるし，$\hat{Z}$ の逆変換も $\hat{Z}$ そのものである．有り体にいえば，ビットフリップをもとに戻すにはもう一度ビットフリップをすればよく，位相フリップをもとに戻すにはもう一度位相フリップをすればよいのである．

クションはデジタル的であることはとても興味深い.

2.4.2 連続量エラーコレクション

連続量でのエラーコレクションも量子ビットの場合とほとんど同じである. その様子を見ていこう.

復習になるが, 連続量の量子情報は状態ベクトル $|\psi\rangle$ である. $|\psi\rangle$ を基底 $|x\rangle$ で展開すると次のようになる.

$$|\psi\rangle = \left(\int dx\,|x\rangle\langle x|\right)|\psi\rangle = \int dx\psi(x)\,|x\rangle \tag{2.66}$$

ここで, $\psi(x) \equiv \langle x|\psi\rangle$ であり, $\psi(x)$ はいわゆる波動関数である. 連続量のエラーは量子ビットのエラーと同様に, $|\psi\rangle$ が $|\psi'\rangle$ に変化することであるから, 波動関数的にいえば $\psi(x)$ が $\psi'(x)$ に変換されることである. ここでも量子ビットの場合と同様,「縛り」は

$$\int dx\,|\psi'(x)|^2 = 1$$

のみである[40]. 慧眼な読者はここまで書いただけで, 連続量エラーコレクションでは $\psi'(x)$ を $\psi(x)$ に変換するのではなく, 基底をもとに戻すことだと想像がついたと思う. また, 一般に位相平面でのエラーは $\hat{E}(\hat{x},\hat{p})$ のように $\hat{x}$, $\hat{p}$ の 2 つの関数として書ける[41]. 量子ビットの場合の $\hat{X}$, $\hat{Z}$ のようなものである.

連続量におけるビットフリップは, x 方向へのエラーである. ここでもこれをコレクションするトリプルモードコード[42]について考えてみる. x 方向へのエラーは一般に $\hat{p}$ のみで書けるので[43], $\hat{E}(\hat{p})$ と書くと, エラーによる「変換」は次のようになる.

$$|\psi'\rangle = \hat{E}(\hat{p})\,|\psi\rangle = \hat{E}(\hat{p})\int dx\psi(x)\,|x\rangle = \int dx\psi(x)\hat{E}(\hat{p})\,|x\rangle \tag{2.67}$$

---

40) 量子ビットを $\sum_{i=0}^{1} c_i\,|i\rangle$ と考えれば, $\psi(x)$ は c_i に対応している.

41) この場合も $\hat{E}(\hat{x},\hat{p})$ はユニタリーである必要はない.

42) 量子ビットの場合と違い, 連続量の構成単位に決まった呼び名がないので, この本ではモードと呼ぶ. これは光を用いた実験ではそれぞれがモードに対応するからである.

43) x 方向への変位演算は, $\hat{D}(x) = e^{-2ix\hat{p}}$ であるので, 一般の場合も $\hat{p}$ で書けても違和感はないであろう.

ここで，

$$\hat{E}(\hat{p})\,|x\rangle = \hat{E}(\hat{p})\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int dpe^{-2ixp}\,|p\rangle$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int dpe^{-2ixp}E(p)\,|p\rangle$$
$$= \frac{1}{\pi}\int dpe^{-2ixp}E(p)\int dye^{2iyp}\,|y\rangle$$
$$= \frac{1}{\pi}\int dy\tilde{E}(y)\,|x-y\rangle \tag{2.68}$$

であることに注意すると ($\tilde{E}(y)$ は $E(p)$ のフーリエ変換)，

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{\pi}\int\int dxdy\psi(x)\tilde{E}(y)\,|x-y\rangle \tag{2.69}$$

となる．

連続量のトリプルモードコードは，図 2.25 に示したエンコードの量子回路に，守りたい量子情報 $|\psi\rangle$ を入力することにより得られる

$$|\psi\rangle_t = \int dx\psi(x)\,|x,x,x\rangle$$

ということになる[44]．

また，量子ビットの場合と同様に 1 モードエラーは次のように書ける．

$$|\psi'\rangle_t = \frac{1}{\pi}\int\int dxdy\psi(x)\tilde{E}(y)\,|x-y,x,x\rangle \tag{2.70}$$

ただし，第 1 モードがエラーしたことにしている．

コレクションを行うためのデコード量子回路を図 2.26 に示す．ここでは，第 1 モードと第 2 モードおよび第 1 モードと第 3 モードの差の演算を行い[45]，その値を測定する．式 (2.70) の場合は，2 つの測定結果はそれぞれ $-y_m$，$-y_m$ となる．同様に第 2 モードエラー，第 3 モードエラー，エラーなしの場合，そ

---

44) ちなみに，

$$\int dx\,|x,x,x\rangle$$

は連続量版 GHZ 状態である．

45) 連続量での排他的論理和 ($x+y \bmod \infty$) の逆演算は，$x-y \bmod \infty$ ということになる．

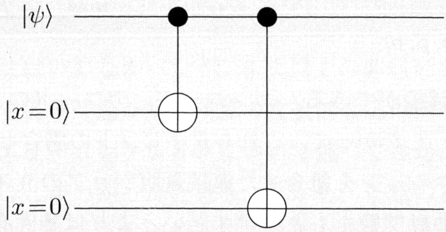


図 2.25　x 方向へのエラーをコレクションのためのエンコード量子回路
ただし，この場合の制御ノットゲートは，式 (2.47) に示したように，$|x\rangle \otimes |y\rangle \rightarrow |x\rangle \otimes |x+y\rangle$ である．これを量子光学的に実現する方法は，量子テレポーテーションネットワーク同様，図 1.34 のようなセットアップである．

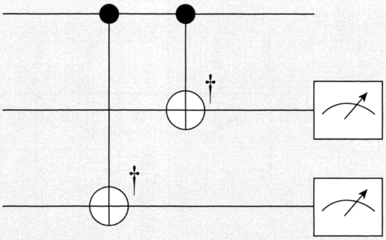


図 2.26　x 方向へのエラーをコレクションのためのデコード量子回路
ただし，この場合の制御ノットゲート † は，式 (2.50) に示したように，$|x\rangle \otimes |y\rangle \rightarrow |x\rangle \otimes |x-y\rangle$ である．

れぞれ測定値が $(y_m, 0)$，$(0, y_m)$，$(0, 0)$ となる．したがって，この測定により，どのモードにどれだけ x 方向への変位エラーがあるかわかる．式 (2.70) の場合は，測定後第 1 モードの状態は次のようになる．

$$|\psi'_m\rangle_1 = \int dx\psi(x)\,|x - y_m\rangle \tag{2.71}$$

最後にこのモードに $\hat{D}(y_m)$ を作用すればよいことがわかる[46)]．

[46)] ほかのモードでエラーが起こった場合でも測定値によりモード 1 に変位演算を施すことになる．

連続量では位相フリップは p 方向へのエラーであり，トリプルモードコードを

$$\int dp\psi(p)\,|p,p,p\rangle$$

とすれば上と同じ議論ができる．エンコード，デコードの量子回路も図 2.22, 2.23 と同様である．したがって，これも量子ビットの場合と同様に，x 方向，p 方向のエラーコレクションを組合せた連続量版ショアの 9 モードコードもユニバーサルである．波動関数をもとに戻すというよりは基底をもとに戻すことを行うことや，測定によりエラーを 2 パターンに押し込むことにより，コレクションが x 方向と p 方向への変位操作のみにより可能となるとなることも量子ビットの場合と同じである．

量子光学的に 9 モードコードを実現した場合のイメージを図 2.27 に示す．

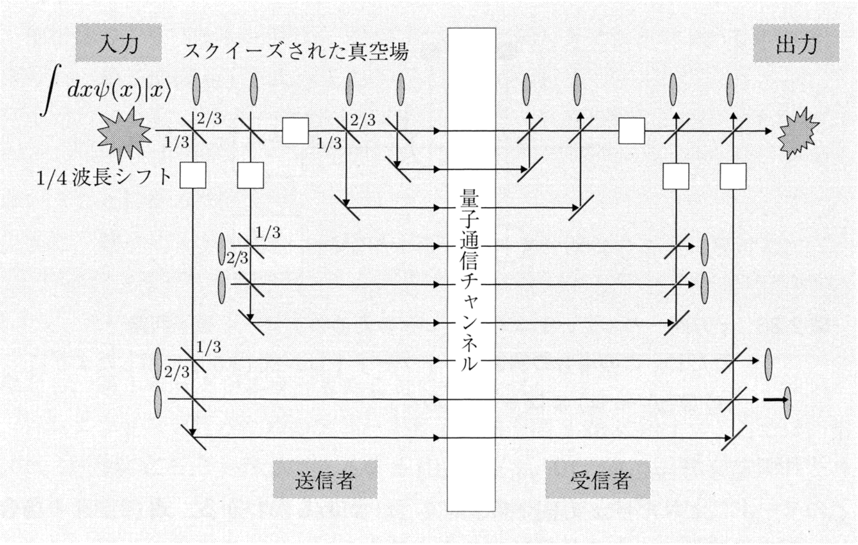


図 2.27　量子光学的に 9 モードコードを実現した場合のイメージ図
制御ノットゲートをビームスプリッターに，アダマールゲートを位相シフトに，$|x=0\rangle$ をスクイーズされた真空場にしている．この中に 3 者間エンタングルメント生成の部分 (図 1.34) が含まれていることに注意してほしい．本文中で説明したように，エラーコレクションのキーパーツは連続量版 GHZ 状態生成部分なのである．

2.5 その他の量子演算と今後の展望

ここまで，顕わにはいわなかったが，3 次以上の非線形光学過程を除いたハミルトニアンのみで実現可能な量子演算の代表的な応用例である量子テレポーテーションと量子エラーコレクションについて述べてきた．これだけでも十分意味があるということがわかったと思う．しかし，任意の量子演算を可能にするためには，3 次以上の非線形光学過程が必要になる．残念ながら，一般に 3 次以上の非線形光学定数は非常に小さいから，そう簡単には実現しない．したがって，今後は 3 次以上の非線形光学過程をうまく用いるための研究に比重が移っていくと思われる．

また，前述したように，量子ビットも連続量も両極の理想極限であり，現実の物理系はその中間であることから，量子情報処理を実現するためには，現実の物理系に歩み寄るための研究が必要になるであろう．これは固体物理において，自由電子近似か，束縛電子近似でスタートし，現実の物性を説明しているのと同じ発想である．例えば，ナイーブな意味での連続量は使い物にならないかもしれないが，量子回路のどこかに 3 次以上の非線形光学過程をうまく使い，回路の途中で，

$$
\begin{aligned}
|0_{\mathrm{L}}\rangle &= C_{\mathrm{N}}\big(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle\big)\\
|1_{\mathrm{L}}\rangle &= C_{\mathrm{N}}\big(|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle\big)
\end{aligned}
\tag{2.72}
$$

のようにコード化することにより，連続量を量子ビットに化けさせることができる．ここで，C_{N} は規格化定数，$|\alpha\rangle$ はコヒーレント状態，$|0_{\mathrm{L}}\rangle$，$|1_{\mathrm{L}}\rangle$ は直交する 2 つのシュレディンガーの猫状態である．また，このように化けさせることは，正に現在のコンピュータにおいて，連続量であるコンデンサーの電圧にしきい値を設け，その上下で 0，1 を割り振るデジタル化と同じように思える．この種の研究が重要になると思われる．

このようなシュレディンガーの猫状態の生成法について少しだけ述べる．図 2.28 に近似的なシュレディンガーの猫状態を生成する方法を示す．この方法では，スクイーズされた真空場を低反射率のビームスプリッターを使ってモニターし，光子数識別器が偶数個の光子を検出したら，出力状態は $C_{\mathrm{N}}\big(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle\big)$

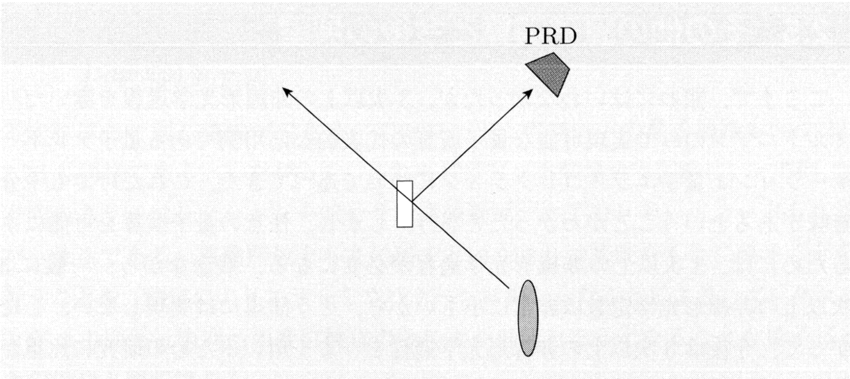


図 2.28 光子数識別器を用いたシュレディンガーの猫状態の生成法
PRD：光子数識別器．低反射率のビームスプリッターにスクイーズされた真空場が入射している．

に近くなっており，奇数個の光子を検出したら出力状態が $C_{\mathrm{N}}\big(|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle\big)$ に近くなっていることを用いる．これらのことは式で表現すればわかりやすい．スクイーズされた真空場は式 (1.143) より

$$|\beta = 0\rangle_g = \frac{1}{\sqrt{\cosh r}}\left(|0\rangle - \frac{\tanh r}{\sqrt{2}}|2\rangle + \frac{\sqrt{6}(\tanh r)^2}{4}|4\rangle - \cdots\right) \tag{2.73}$$

であり，シュレディンガーの猫状態の猫状態は式 (1.125) よりそれぞれ

$$|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2n}}{\sqrt{2n!}}|2n\rangle \tag{2.74}$$

$$|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2n+1}}{\sqrt{(2n+1)!}}|2n+1\rangle \tag{2.75}$$

であるから，光子数識別器で偶数個の光子を検出すれば，出力も偶数個の光子になり，かつその光子数分布も式 (2.74) に近づき，光子数識別器で奇数個の光子を検出すれば，出力も奇数個の光子になり，かつその光子数分布も式 (2.75) に近づくということである．このように光子数識別器で測定することにより出

力状態を変化させることを測定誘起型非線形性ということがある．ただし，この手の操作は，光子数識別器の結果に左右されるいわば条件付きで受動的なものであることに注意すべきである．本当は，決定論的にボタンを押したとき必ずシュレディンガーの猫状態が生成されるような方法を開発したいものである．光子数識別器の応用としてはエンタングルメントの増強などがあるが，本書では触れない．

2 章の問題

□ **1**　式 (2.6) − (2.7) を確認せよ．

□ **2**　制御ノットゲートを表現する基底として，計算基底 $\{|00_{\mathrm{L}}\rangle, |01_{\mathrm{L}}\rangle, |10_{\mathrm{L}}\rangle, |11_{\mathrm{L}}\rangle\}$ というものがあり，任意の 2 量子ビット状態 $c_0|00_{\mathrm{L}}\rangle + c_1|01_{\mathrm{L}}\rangle + c_2|10_{\mathrm{L}}\rangle + c_3|11_{\mathrm{L}}\rangle$ を縦ベクトル $[c_0, c_1, c_2, c_3]^T$ で表現する．このとき，制御ノットゲートを表す行列は，

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{CNOT}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

となることを示せ．

□ **3**　式 (2.17) で示された光カー効果のユニタリー変換を，計算基底を用いて行列表示せよ．この行列を $\boldsymbol{K}$ とする．

□ **4**　式 (2.20) と (2.22) で示されたユニタリー変換が，計算基底を用いた行列表示をすると，いずれも

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{I}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.76}$$

となることを示せ．また，任意の 1 量子ビット $c_0|0_{\mathrm{L}}\rangle + c_1|1_{\mathrm{L}}\rangle$ を縦ベクトル $[c_0, c_1]^T$ としたとき，式 (2.19) のような動作をするアダマールゲートは，

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.77}$$

となることを示し，式 (2.76) の行列 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{I}}$ が，$\boldsymbol{H}_{\mathrm{I}} = \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{H}$ となることを示せ．ただし，I は 2 行 2 列の単位行列である (これは第 2 量子ビットのみをアダマール変換し，第 1 量子ビットはそのままということを示している)．

□ **5**　$\boldsymbol{M}_{\mathrm{CNOT}} = \boldsymbol{H}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{H}_{\mathrm{I}}$ であることを確認せよ．

□ **6**　式 (2.29) を確認せよ．

□ **7**　式 (2.48) を確認せよ．

□ **8** 式 (2.51) の状態が $\hat{x}_{\mathrm{V}} - \hat{x}_{\mathrm{A}}$，$\hat{p}_{\mathrm{V}} + \hat{p}_{\mathrm{A}}$ の同時固有状態であることを確認せよ．

□ **9** 図 2.17 の 3 者間エンタングルメントと書かれた量子回路を量子ビットの系で考えることにする．このとき，全ての入力状態は $|x=0\rangle$ ではなく $|0_{\mathrm{L}}\rangle$ となり，アダマールゲートと制御ノットゲートはそれぞれ式 (2.19)，(2.15) で示すような動作をすることになる．この場合の出力状態が，

$$|\mathrm{GHZ2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|000_{\mathrm{L}}\rangle + |111_{\mathrm{L}}\rangle\right)$$

のような GHZ 状態になっていることを示せ．

□ **10** 図 2.20 で示した量子回路の出力が，$c_0|000\rangle + c_1|111\rangle$ となることを確認せよ．

□ **11** 図 2.22 で示した量子回路の出力が，

$$c_0 \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} + c_1 \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

となることを確認せよ．

□ **12** 図 2.24 で示したショアの 9 ビットコードの量子回路において，適当な 1 量子ビットに何らかのエラーが起こったと想定し，エラーコレクションを行ってみよ．

□ **13** 式 (2.69) を確認せよ．

□ **14** 量子光学的に 9 モードコードを実現した場合のイメージは図 2.27 のようであるが，これをもう少し具体的な実験図に改めよ．

章末問題解答

1 量子光学

1 $\langle x|\hat{p}|\psi\rangle = \langle x|\hat{p}\left(\int dx'|x'\rangle\langle x'|\right)|\psi\rangle$

$$= \int dx' \langle x|\hat{p}|x'\rangle\langle x'|\psi\rangle \tag{i}$$

ここで，$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ および式 (1.8)，(1.10) から，

$$\langle x|\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}|x'\rangle = \langle x|i\hbar|x'\rangle = i\hbar\delta(x - x')$$

$$\langle x|\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}|x'\rangle = (x - x')\langle x|\hat{p}|x'\rangle$$

となるから，

$$\langle x|\hat{p}|x'\rangle = \frac{i\hbar\delta(x - x')}{x - x'}$$

となる．したがって，これを用いて式 (i) をさらに変形すると，

$$\begin{aligned}\langle x|\hat{p}|\psi\rangle &= \int dx' \frac{i\hbar\delta(x - x')}{x - x'}\langle x'|\psi\rangle \\ &= i\hbar\left\{\psi(x)\int dx' \frac{\delta(x - x')}{x - x'} - \frac{d\psi}{dx}\int dx' \delta(x - x')\right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{2}\frac{d^2\psi}{dx^2}\int dx' \delta(x - x')(x - x') - \cdots\right\} \\ &= -i\hbar\frac{d\psi}{dx}\end{aligned}$$

となる．ここで，$\langle x'|\psi\rangle = \psi(x')$ およびテイラー展開

$$\psi(x') = \psi(x) - \frac{d\psi}{dx}(x - x') + \frac{1}{2}\frac{d^2\psi}{dx^2}(x - x')^2 - \cdots$$

を用いた．

2 6 ページの例題 1.1 と同様．

3　式 (1.37) を，式 (1.28)，(1.36) と公式

$$\int d\xi H_n(\xi)e^{-(\xi-\xi_0)^2} = \sqrt{\pi}(2\xi_0)^n$$

を用いて変形する．

$$\begin{aligned}
w_n &= \int dx \varphi_n(x)\varphi_{\mathrm{coh}}(x) \\
&= \int dx \sqrt{\frac{1}{2^n n!}\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \\
&\quad \times \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x-\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\alpha)^2} \\
&= \sqrt{\frac{m\omega}{2^n n! \pi\hbar}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \\
&\quad \times \int dx H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) e^{-\frac{m\omega}{\hbar}(x-\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\alpha)^2} \\
&= \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}}
\end{aligned}$$

4　例題 1.3 と同様.

5　
$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t) &= e^{i\frac{\hat{H}_{\mathrm{sys}}}{\hbar}t}\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})e^{-i\frac{\hat{H}_{\mathrm{sys}}}{\hbar}t} \\
&= \exp\left\{it\int d^3k' \sum_{\sigma'=1}^{2} \frac{\omega_{\boldsymbol{k}'}}{2}\left(\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}'\sigma'}\hat{a}_{\boldsymbol{k}'\sigma'} + \hat{a}_{\boldsymbol{k}'\sigma'}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}'\sigma'}\right)\right\} \\
&\qquad \times i\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3k \sum_{\sigma=1}^{2} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{2\epsilon_0}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\sigma}\left(\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right) \\
&\qquad \times \exp\left\{-it\int d^3k'' \sum_{\sigma''=1}^{2} \frac{\omega_{\boldsymbol{k}''}}{2}\left(\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}''\sigma''}\hat{a}_{\boldsymbol{k}''\sigma''} + \hat{a}_{\boldsymbol{k}''\sigma''}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}''\sigma''}\right)\right\}
\end{aligned}$$

ここで，異なるモードの生成･消滅演算子は交換することと，式 (1.60) から，式 (1.61) は明らか.

6　前問と同様.

7　式 (1.66)，(1.67) を用いて，式 (1.61) を変形する．

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t) &= i\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3k \sum_{\sigma=1}^{2} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{2\epsilon_0}} \\
&\qquad \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\sigma}\left\{\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma}e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_{\boldsymbol{k}}t)} - \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma}e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_{\boldsymbol{k}}t)}\right\} \\
&= i\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3k \sum_{\sigma=1}^{2} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{2\epsilon_0}}
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\sigma}\left\{\left(\sqrt{\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{2\hbar}}\hat{x}_{\boldsymbol{k}\sigma}+i\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}}\hat{p}_{\boldsymbol{k}\sigma}\right)e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_{\boldsymbol{k}}t)}\right.$$
$$\left.-\left(\sqrt{\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{2\hbar}}\hat{x}_{\boldsymbol{k}\sigma}-i\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}}\hat{p}_{\boldsymbol{k}\sigma}\right)e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_{\boldsymbol{k}}t)}\right\}$$
$$=-\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\int d^3k\sum_{\sigma=1}^{2}\sqrt{\frac{1}{\epsilon_0}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\sigma}\Big\{\omega_{\boldsymbol{k}}\hat{x}_{\boldsymbol{k}\sigma}\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_{\boldsymbol{k}}t)$$
$$+\hat{p}_{\boldsymbol{k}\sigma}\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_{\boldsymbol{k}}t)\Big\}$$

8 式 (1.59) から，

$$\begin{aligned}
&e^{-i\Lambda\hat{L}_0}\hat{a}_1e^{i\Lambda\hat{L}_0}\\
&=\hat{a}_1+[-i\Lambda\hat{L}_0,\ \hat{a}_1]+\frac{1}{2!}[-i\Lambda\hat{L}_0,\ [-i\Lambda\hat{L}_0,\ \hat{a}_1]\,]+\cdots\\
&=\hat{a}_1+i\frac{\Lambda}{2}\hat{a}_1+\frac{1}{2!}\left(i\frac{\Lambda}{2}\right)^2\hat{a}_1+\cdots\\
&=\hat{a}_1e^{i\frac{\Lambda}{2}}
\end{aligned}$$

となる．他の場合も同様．

9 定義から，

$$\begin{aligned}
[\hat{L}_1,\ \hat{L}_2]&=\left[\frac{1}{2}(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2+\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger),\ \frac{1}{2i}(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2-\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger)\right]\\
&=\frac{1}{4i}\Big([\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2,\ -\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger]+[\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger,\ -\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2]\Big)\\
&=\frac{1}{4i}\left(-\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_2^\dagger+\hat{a}_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2+\hat{a}_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2-\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_2^\dagger\right)\\
&=\frac{1}{4i}\left[-2\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1(\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2+1)+2(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1+1)\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\right]\\
&=i\frac{1}{2}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1-\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\right)\\
&=i\hat{L}_3
\end{aligned}$$

となる．したがって，$[\hat{L}_1,\ \hat{L}_2]=i\hat{L}_3$ である．ほかの場合も同様に確かめられる．角運動量演算子においては $[\hat{L}_1,\ \hat{L}_2]=i\hbar\hat{L}_3$ であるから，$\hbar=1$ とすれば全く同じである．ただし，本書では $\hbar=1/2$ としているから，定数 2 だけ異なっていることになる．しかし，$\hat{L}_i$ の定義を $\hat{L}_i'=\hat{L}_i/2$ とすれば，$[\hat{L}_1',\ \hat{L}_2']=i\hat{L}_3'/2$ となり，完全に一致させることができる．この部分が気になる読者は，$\hat{L}_i'$ を使うことを勧める．もちろん，本質的には何の差もないが．

10 式 (1.72)，(1.107)，(1.108) を用いてコヒーレント状態の電場期待値を計算する．

$$\langle\alpha|\hat{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t)|\alpha\rangle = \langle\alpha|\frac{i}{2}\boldsymbol{e}\left[\hat{a}e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} - \hat{a}^\dagger e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}\right]|\alpha\rangle$$
$$= \frac{i}{2}\boldsymbol{e}\left[\alpha e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} - \alpha^\dagger e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}\right]$$
$$= -|\alpha|\boldsymbol{e}\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t+\theta)$$

11 省略

12 $|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{n}\omega t}|\alpha\rangle$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-i\hat{n}\omega t)^m}{m!}\cdot e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$
$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-i\omega t)^m}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\hat{n}^m|n\rangle$$
$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-i\omega t)^m}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}n^m|n\rangle$$
$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-i\omega t)^m}{m!}n^m|n\rangle$$
$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}e^{-in\omega t}|n\rangle$$
$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$
$$= |\alpha e^{-i\omega t}\rangle$$

13 式 (1.59) を用いて計算する．

$$\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha) = e^{-(\alpha\hat{a}^\dagger-\alpha^*\hat{a})}\hat{a}e^{\alpha\hat{a}^\dagger-\alpha^*\hat{a}}$$
$$= \hat{a} + [\,-(\alpha\hat{a}^\dagger-\alpha^*\hat{a}),\ \hat{a}\,]$$
$$+\frac{1}{2!}[\,-(\alpha\hat{a}^\dagger-\alpha^*\hat{a}),\ [\,-(\alpha\hat{a}^\dagger-\alpha^*\hat{a}),\ \hat{a}\,]\,]+\cdots$$
$$= \hat{a}+\alpha$$

14 $\hat{S}(r)|0\rangle = e^{\frac{r}{2}(\hat{a}^2-\hat{a}^{\dagger 2})}|0\rangle$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[\frac{r}{2}(\hat{a}^2-\hat{a}^{\dagger 2})\right]^n}{n!}|0\rangle$$
$$= \left[1+\frac{r}{2}(\hat{a}^2-\hat{a}^{\dagger 2})+\frac{1}{2!}\left(\frac{r}{2}\right)^2(\hat{a}^2-\hat{a}^{\dagger 2})^2+\cdots\right]|0\rangle$$

$$= |0\rangle - \frac{r}{2}\sqrt{2}|2\rangle - \frac{1}{2!}\left(\frac{r}{2}\right)^2(\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2})\sqrt{2}|2\rangle + \cdots$$
$$= |0\rangle - \frac{r}{2}\sqrt{2}|2\rangle - \frac{1}{2!}\left(\frac{r}{2}\right)^2\sqrt{2}(\sqrt{2}|0\rangle - \sqrt{3}\sqrt{4}|4\rangle) + \cdots$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\cosh r}}|0\rangle - \frac{\tanh r}{\sqrt{2\cosh r}}|2\rangle + \cdots$$

15 $\hat{a}\cosh r - \hat{a}^\dagger \sinh r = \frac{\hat{x}+i\hat{p}}{2}\cdot\frac{e^r+e^{-r}}{2} - \frac{\hat{x}-i\hat{p}}{2}\cdot\frac{e^r-e^{-r}}{2}$

$$= \hat{x}e^{-r} + i\hat{p}e^{r}$$

16 式 (1.146) で示したように，$\hat{S}^\dagger(r)\hat{x}\hat{S}(r) = \hat{x}e^{-r}$ である．
これを用いて $\hat{S}^\dagger(r)\hat{x}^2\hat{S}(r)$ を計算する．

$$\hat{S}^\dagger(r)\hat{x}^2\hat{S}(r) = \hat{S}^\dagger(r)\hat{x}\hat{S}(r)\hat{S}^\dagger(r)\hat{x}\hat{S}(r) = \hat{x}^2e^{-2r}$$

したがって，

$$_g\langle\beta=0|\hat{x}^2|\beta=0\rangle_g = \langle 0|\hat{S}^\dagger(r)\hat{x}^2\hat{S}(r)|0\rangle = \langle 0|\hat{x}^2e^{-2r}|0\rangle = \langle 0|\hat{x}^2|0\rangle e^{-2r} = \frac{1}{4}e^{-2r}$$

$_g\langle\beta=0|\hat{p}^2|\beta=0\rangle_g$ も同様．

17 $\hat{I}_1 = \hat{a}_1'^\dagger\hat{a}_1'$

$$= \frac{\hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_2^\dagger}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\hat{a}_1 - \hat{a}_2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 - \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 - \hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\right)$$

他は明らか．

18 省略

19 式 (1.169) から，ロスを $1-\eta$ とし，モード 1 の測定したい光が真空場である場合の出力を 1 とすれば，スペクトラムアナライザーの出力 S は，

$$S = \eta\cdot 4\cdot {}_1\langle\psi|\hat{x}_1^2|\psi\rangle_1 + (1-\eta)\cdot 1$$

となる．

-10dB のスクイーズは $4 \cdot {}_1\langle\psi|\hat{x}_1^2|\psi\rangle_1 = 0.1$ に相当し，$+10$dB のアンチスクイーズは，これが 10 であるから，上式に当てはめると，スクイーズは，

$$S = 0.5 \times 0.1 + 0.5 \times 1 = 0.55$$

から，-2.6dB となり，アンチスクイーズは，

$$S = 0.5 \times 10 + 0.5 \times 1 = 5.5$$

から，7.4dB となる．

20 式 (2.77) において，$4 \cdot {}_1\langle\psi|\hat{x}_1^2|\psi\rangle_1 \to 0$ とすると，$S \to 0.5$ となることより明らか．

21
$$\begin{aligned}
W_0(x,p) &= \frac{1}{\pi}\int d\xi e^{-2ip\xi}\langle x+\xi/2|0\rangle\langle 0|x-\xi/2\rangle \\
&= \frac{1}{\pi}\int d\xi e^{-2ip\xi}\psi_0(x+\xi/2)\psi_0(x-\xi/2) \\
&= \frac{1}{\pi}\int d\xi e^{-2ip\xi}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-(x+\xi/2)^2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-(x-\xi/2)^2} \\
&= \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int d\xi e^{-\frac{1}{2}(\xi+2ip)^2-2x^2-2p^2} \\
&= \frac{1}{\pi}e^{-2x^2-2p^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int d\xi e^{-\frac{1}{2}(\xi+2ip)^2} \\
&= \frac{2}{\pi}e^{-2(x^2+p^2)}
\end{aligned}$$

他も同様．

22 $\psi_2(x) = \langle x|2\rangle$ を求める．

$$\begin{aligned}
\langle x|2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\langle x|\hat{a}^{\dagger 2}|0\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\langle x|(\hat{x}-i\hat{p})^2|0\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\langle x|\hat{x}^2|0\rangle - \langle x|\hat{p}^2|0\rangle - i\langle x|(\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x})|0\rangle\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{x^2\langle x|0\rangle - \frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2}\langle x|0\rangle - i\langle x|\frac{1}{2i}(\hat{a}^2-\hat{a}^{\dagger 2})|0\rangle\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{x^2\psi_0(x) - \frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2}\psi_0(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle x|2\rangle\right\}
\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\psi_2(x) = \sqrt{2}x^2\psi_0(x) + \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{d^2}{dx^2}\psi_0(x)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}(4x^2-1)e^{-x^2}$$

もちろん，$\psi_2(x)$ は式 (1.28) の $\varphi_2(x)$ と同じであるから検算を勧める．
前問と同様，これを用いて $W_2(x,p)$ を計算すると，

$$W_2(x,p) = \frac{2}{\pi}e^{-2(x^2+p^2)}\left\{2(2x^2+2p^2+1)^2-1\right\}$$

となる．ちなみに，$W_n(x,p)$ は，

$$W_n(x,p) = (-1)^n\frac{2}{\pi}e^{-2(x^2+p^2)}L_n(4x^2+4p^2)$$

となる．ただし，$L_n(\xi)$ はラゲールの多項式で，

$$L_n(\xi) = \frac{e^\xi}{n!}\frac{d^n}{d\xi^n}(e^{-\xi}\xi^n)$$

である．

23 まず，次の関係を導く．

$$\hat{B}_{\mathrm{HBS}*}|x\rangle_{\mathrm{A}}\otimes|y\rangle_{\mathrm{B}} = \left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right\rangle_{\mathrm{A}}\otimes\left|\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right\rangle_{\mathrm{B}} \tag{ii}$$

ただし，$|x\rangle$，$|y\rangle$ は，$\hat{x}$ の固有状態である．
例題 1.12 の「省エネ」解答にならって，

$$\begin{aligned}&{}_{\mathrm{B}}\langle y|\otimes{}_{\mathrm{A}}\langle x|\hat{B}^\dagger_{\mathrm{HBS}*}\hat{x}_{\mathrm{A}}\hat{B}_{\mathrm{HBS}*}|x\rangle_{\mathrm{A}}\otimes|y\rangle_{\mathrm{B}}\\ &\quad= {}_{\mathrm{B}}\langle y|\otimes{}_{\mathrm{A}}\langle x|\frac{\hat{x}_{\mathrm{A}}+\hat{x}_{\mathrm{B}}}{\sqrt{2}}|x\rangle_{\mathrm{A}}\otimes|y\rangle_{\mathrm{B}}\\ &\quad= \frac{x+y}{\sqrt{2}}\end{aligned} \tag{iii}$$

$$\begin{aligned}&{}_{\mathrm{B}}\langle y|\otimes{}_{\mathrm{A}}\langle x|\hat{B}^\dagger_{\mathrm{HBS}*}\hat{x}_{\mathrm{B}}\hat{B}_{\mathrm{HBS}*}|x\rangle_{\mathrm{A}}\otimes|y\rangle_{\mathrm{B}}\\ &\quad= {}_{\mathrm{B}}\langle y|\otimes{}_{\mathrm{A}}\langle x|\frac{\hat{x}_{\mathrm{A}}-\hat{x}_{\mathrm{B}}}{\sqrt{2}}|x\rangle_{\mathrm{A}}\otimes|y\rangle_{\mathrm{B}}\\ &\quad= \frac{x-y}{\sqrt{2}}\end{aligned} \tag{iv}$$

であるから，$\hat{B}_{\mathrm{HBS}*}|x\rangle_{\mathrm{A}}\otimes|y\rangle_{\mathrm{B}}$ は，

$$\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right\rangle_{\mathrm{A}}\otimes\left|\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right\rangle_{\mathrm{B}}$$

でなければならない．これも $\hat{x}$ の固有状態だからできる芸当である．
したがって，式 (1.198) は以下のように確認できる．

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{EPR}\rangle_{\mathrm{AB}} &= \hat{B}_{\mathrm{HBS}*}|p=0\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |x=0\rangle_{\mathrm{B}} \\
&= c'\hat{B}_{\mathrm{HBS}*}\int dx|x\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |x=0\rangle_{\mathrm{B}} \\
&= c'\int dx \left|\frac{x+0}{\sqrt{2}}\right\rangle_{\mathrm{A}} \otimes \left|\frac{x-0}{\sqrt{2}}\right\rangle_{\mathrm{B}} \\
&= c\int dx\,|x\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |x\rangle_{\mathrm{B}} \qquad \text{(v)}
\end{aligned}
$$

24　式 (1.199), (1.200) から,

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{EPR}*\rangle_{\mathrm{AB}} &= \exp\left\{r(\hat{a}_{\mathrm{A}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathrm{B}}^{\dagger} - \hat{a}_{\mathrm{A}}\hat{a}_{\mathrm{B}})\right\}|0\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}} \\
&= \exp\left(\hat{a}_{\mathrm{A}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathrm{B}}^{\dagger}\tanh r\right)\exp\left\{-(\hat{a}_{\mathrm{A}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathrm{A}} + \hat{a}_{\mathrm{B}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathrm{B}} + 1)\ln(\cosh r)\right\} \\
&\quad \times \exp(-\hat{a}_{\mathrm{A}}\hat{a}_{\mathrm{B}}\tanh r)|0\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}} \\
&= \exp\left(\hat{a}_{\mathrm{A}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathrm{B}}^{\dagger}\tanh r\right)|0\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |0\rangle_{\mathrm{B}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\tanh r)^n}{n!}\sqrt{n!}|n\rangle_{\mathrm{A}} \otimes \sqrt{n!}|n\rangle_{\mathrm{B}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(\tanh r)^n|n\rangle_{\mathrm{A}} \otimes |n\rangle_{\mathrm{B}}
\end{aligned}
$$

となり，規格化因子を加えれば，式 (1.201) となる．ただし，規格化因子は

$$
\sum_{n=0}^{\infty}(\tanh r)^{2n} = \frac{1}{1-(\tanh r)^2}
$$

から求めることができる．

-10dB のスクイーズは $r = 1.15$ に相当するから，$(\tanh r)^2 = 0.67$ である．したがって，$(0.67)^6 < 0.1$ であるから，5 個までの光子が存在する確率はそれぞれ 0.1 を超える．つまり，このあたりまで考えればよい．

25　省略

26　省略

2　量子情報物理

1　省略

2　省略

3

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

4　式 (2.20) で示されたユニタリー変換が，行列 $\boldsymbol{H}_\mathrm{I}$ となることは明らか．
式 (2.22) で示されたユニタリー変換について考える．この逆変換は明らかに式 (2.20) で示されたユニタリー変換であるから，求める行列は $\boldsymbol{H}_\mathrm{I}$ の逆行列となる．$\boldsymbol{H}_\mathrm{I}$ の逆行列は自分自身だから，式 (2.22) で示されたユニタリー変換も行列 $\boldsymbol{H}_\mathrm{I}$ となる．
アダマールゲートが式 (2.77) のようになることは明らか．また，$\boldsymbol{H}_\mathrm{I} = \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{H}$ も明らか．

5　省略

6　省略

7　$|x=0\rangle_\mathrm{A} \xrightarrow{\mathrm{H}} |p=0\rangle_\mathrm{A} = c\displaystyle\int dx|x\rangle_\mathrm{A}$ から明らか．

8　$(\hat{x}_\mathrm{V} - \hat{x}_\mathrm{A})|x_-, p_+\rangle_\mathrm{VA}$

$$= \hat{D}_\mathrm{V}(x_- + ip_+)\hat{D}^\dagger_\mathrm{V}(x_- + ip_+)(\hat{x}_\mathrm{V} - \hat{x}_\mathrm{A})|x_-, p_+\rangle_\mathrm{VA}$$

$$= \hat{D}_\mathrm{V}(x_- + ip_+)\hat{D}^\dagger_\mathrm{V}(x_- + ip_+)(\hat{x}_\mathrm{V} - \hat{x}_\mathrm{A})\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\hat{D}_\mathrm{V}(x_- + ip_+)|n\rangle_\mathrm{V}|n\rangle_\mathrm{A}$$

$$= \hat{D}_\mathrm{V}(x_- + ip_+)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\hat{D}^\dagger_\mathrm{V}(x_- + ip_+)(\hat{x}_\mathrm{V} - \hat{x}_\mathrm{A})\hat{D}_\mathrm{V}(x_- + ip_+)|n\rangle_\mathrm{V}|n\rangle_\mathrm{A}$$

$$= \hat{D}_\mathrm{V}(x_- + ip_+)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}(\hat{x}_\mathrm{V} + x_- - \hat{x}_\mathrm{A})|n\rangle_\mathrm{V}|n\rangle_\mathrm{A}$$

$$= \hat{D}_\mathrm{V}(x_- + ip_+)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\hat{a}_\mathrm{V} + \hat{a}^\dagger_\mathrm{V}}{2} + x_- - \frac{\hat{a}_\mathrm{A} + \hat{a}^\dagger_\mathrm{A}}{2}\right)|n\rangle_\mathrm{V}|n\rangle_\mathrm{A}$$

$$= \hat{D}_\mathrm{V}(x_- + ip_+)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}x_-|n\rangle_\mathrm{V}|n\rangle_\mathrm{A}$$

$$= x_- \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{D}_{\mathrm{V}}(x_- + ip_+)|n\rangle_{\mathrm{V}}|n\rangle_{\mathrm{A}}$$
$$= x_-|x_-, p_+\rangle_{\mathrm{VA}}$$

$(\hat{p}_{\mathrm{V}} + \hat{p}_{\mathrm{A}})|x_-, p_+\rangle_{\mathrm{VA}} = p_+|x_-, p_+\rangle_{\mathrm{VA}}$ も同様に示すことができる．

9 $$|000_{\mathrm{L}}\rangle \xrightarrow{\mathrm{H}} \frac{|0_{\mathrm{L}}\rangle + |1_{\mathrm{L}}\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |00_{\mathrm{L}}\rangle \xrightarrow{\mathrm{CNOT}\times 2} \frac{1}{\sqrt{2}}(|000_{\mathrm{L}}\rangle + |111_{\mathrm{L}}\rangle)$$

10 省略

11 省略

12

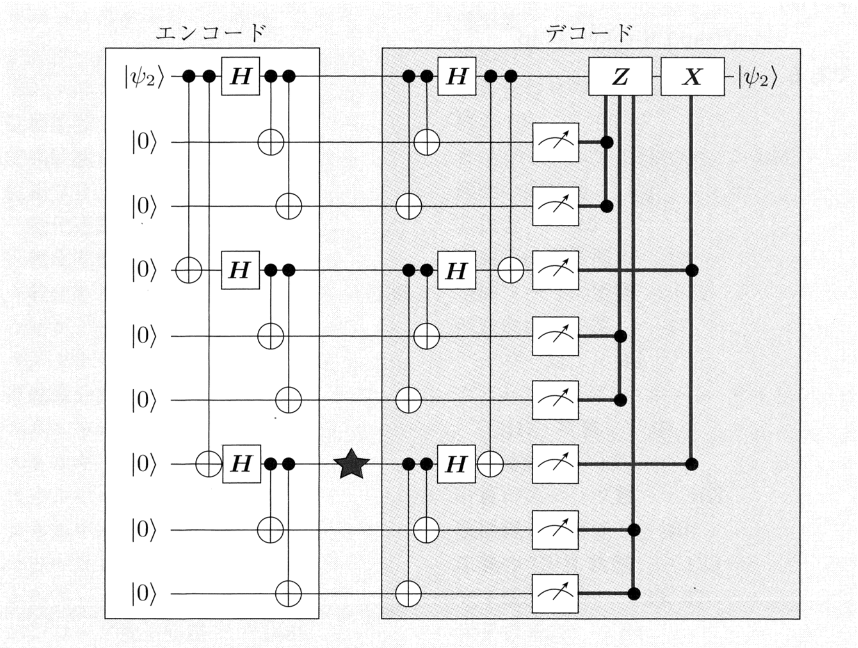


図 ショアの 9 ビットコードの量子回路
星印が付いている第 7 量子ビットにビットフリップエラーが起こっている．

上図に示すように，第 7 量子ビットにビットフリップエラーが起こっている場合を考える．つまり，デコード量子回路直前の状態が，$|\psi_2\rangle = c_0|0_{\mathrm{L}}\rangle + c_1|1_{\mathrm{L}}\rangle$ として，

$$c_0 \frac{(|000_{\rm L}\rangle + |111_{\rm L}\rangle)(|000_{\rm L}\rangle + |111_{\rm L}\rangle)(|100_{\rm L}\rangle + |011_{\rm L}\rangle)}{2\sqrt{2}} + c_1 \frac{(|000_{\rm L}\rangle - |111_{\rm L}\rangle)(|000_{\rm L}\rangle - |111_{\rm L}\rangle)(|100_{\rm L}\rangle - |011_{\rm L}\rangle)}{2\sqrt{2}}$$

と書ける．このときのデコーダー出力は，

$$(c_0|0_{\rm L}\rangle - c_1|1_{\rm L}\rangle)|00_{\rm L}\rangle|000_{\rm L}\rangle|011_{\rm L}\rangle$$

のうち，第1量子ビット以外を測定し，得られる値だから，下位2ビットが1であり，他は0となる．この結果，第7量子ビットにビットフリップエラーが起こったことがわかるから，残しておいた第1量子ビットにユニタリー変換 $\hat{Z}$ を施すことになる．

13　省略

14　上手い方法を考案したら，是非筆者に連絡してほしい．筆者の電子メールのアドレスは，

akiraf@ap.t.u-tokyo.ac.jp

である．

索　引

ア　行

カ　行

サ 行

タ 行

ハ 行

マ　行

ヤ　行

ラ　行

英数字

あとがき

以上，量子光学と量子情報科学について述べてきた．わかったと思うが，量子情報科学とは量子エンタングルメントに関する理解のための学問のことである．また，量子情報処理とは，できるだけ多数の量子系を強くエンタングルさせ，これらを制御することである．量子光学的手法は，この量子情報科学を実験的に研究するには格好のツールで，過去に思考実験であったEPRのパラドックスやシュレディンガーの猫状態などを実際の実験系の俎上に上げた．料理法はまだ稚拙だが，量子テレポーテーションなど，おもしろいことができるようになっている．筆者としては，この本の読者が新たな料理法を見つけるようになれば，望外の喜びである．

∗ 第2刷にあたって，大学院生の李 憲之君に訂正箇所の指摘をいただいた．記して感謝したい．

(2007年1月)

著者略歴

古澤（ふるさわ）　明（あきら）

1984年　東京大学工学部物理工学科卒業
1986年　東京大学大学院工学系研究科修士課程修了
　　　　日本光学工業(株)(現ニコン)入社
1988年　東京大学先端科学技術研究センター研究員
1996年　カリフォルニア工科大学客員研究員
現　在　東京大学大学院工学系研究科助教授
　　　　工学博士

主要著書

現代物理最前線5(共立出版：共著) 2001年
『21世紀，物理はどう変わるか』(裳華房：共著) 2002年

新・工科系の物理学＝TKP-A8

量子光学と量子情報科学

2005年4月10日© 初版発行
2013年1月25日 初版第3刷発行

著　者　古澤　明　　発行者　矢沢和俊
　　　　　　　　　　印刷者　中澤　眞
　　　　　　　　　　製本者　米良孝司

【発行】　株式会社　数理工学社
〒151-0051　東京都渋谷区千駄ヶ谷1丁目3番25号
☎(03)5474-8661(代)　サイエンスビル

【発売】　株式会社　サイエンス社
〒151-0051　東京都渋谷区千駄ヶ谷1丁目3番25号
☎(03)5474-8500(代)　振替 00170-7-2387

組版　ビーカム
印刷　(株)シナノ　製本　ブックアート

《検印省略》

ISBN4-901683-23-3

PRINTED IN JAPAN